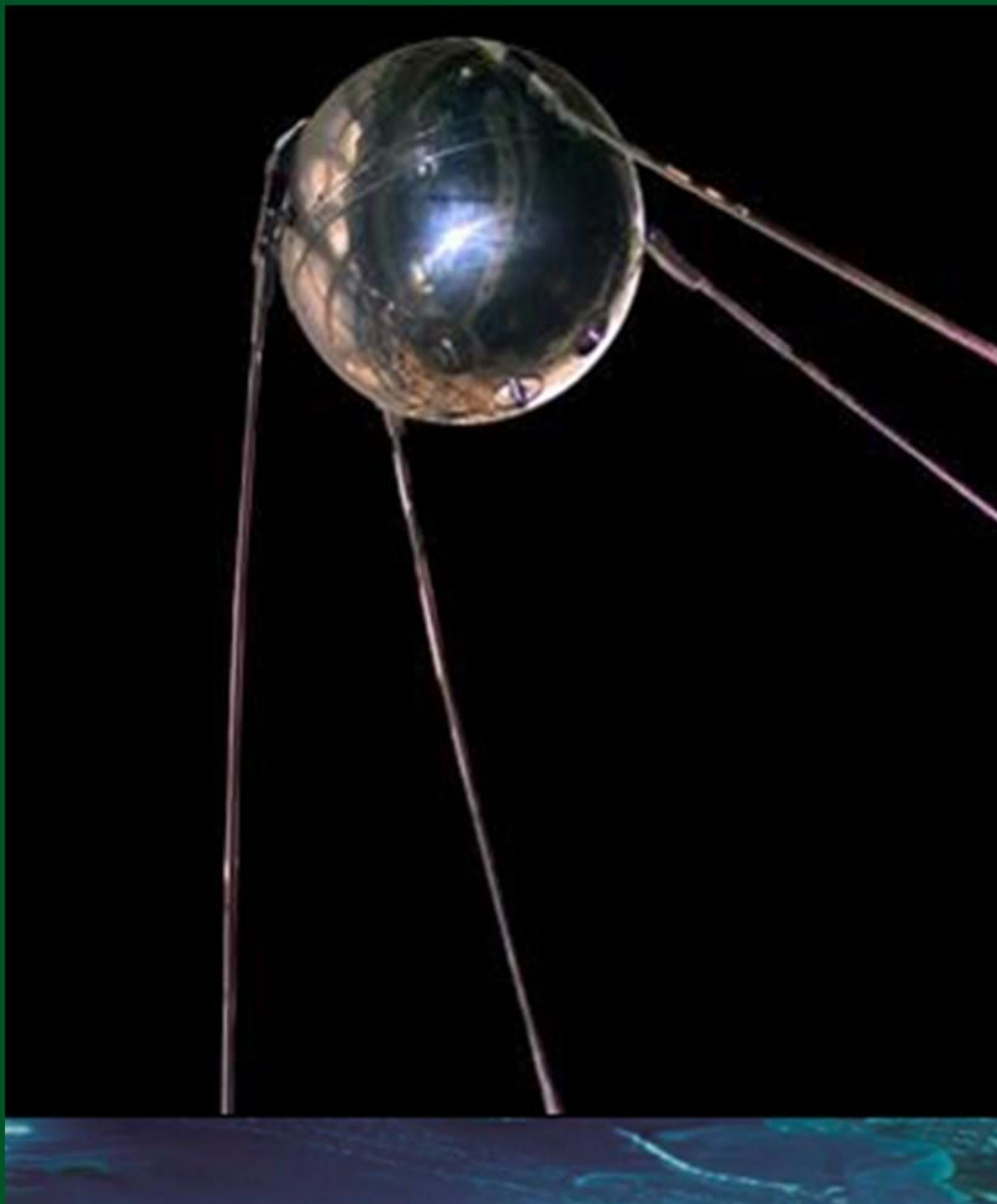
# Didáctica de las Ciencias

## Jornadas Académicas

Revista de publicación anual No. 3



Divulgación

Enseñanza

Investigación educativa

Escuela Superior de Física y Matemáticas

Mayo de 2020

ISSN en trámite

## Contenido



# Editorial

Este tercer número de la Revista Didáctica de las Ciencias, Jornadas Académicas, lo dedicamos a la memoria de la doctora Patricia Camarena Gallardo, profesora e investigadora del Instituto Politécnico Nacional, durante 50 años.

Nuestra querida maestra Paty, como solíamos llamarla, por la sencillez de su trato, que no ostentaba sus títulos, fue la creadora de la Teoría de las Matemáticas en el contexto de las Ciencias, además de muchas otras aportaciones al aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas a nivel superior.

Su legado es muy amplio, y ella lo compartió generosamente con quienes le solicitábamos apoyo académico, no solamente en el Instituto, sino en diversas universidades nacionales y extranjeras.

Cuando se hace un homenaje póstumo a una personalidad de la talla de Paty Camarena, suele hablarse del gran vacío que deja. Sin embargo, en este caso no aplica esa afirmación. Sus aportaciones son trascendentes y numerosas, por lo que estaremos plenos de Paty durante mucho tiempo, asimilando sus enseñanzas.

SU recuerdo estará siempre en nuestras mentes y nuestros corazones.

Luz María de Gpe. González Álvarez

Cintillo Legal Revista Didáctica de las Ciencias, año 3, No. 3, mayo 2020, es una publicación anual editada por la Escuela Superior de Física y Matemáticas (ESFM), del Instituto Politécnico Nacional, Av. Instituto Politécnico Nacional s/n Edificio 9 Unidad Profesional “Adolfo López Mateos” Col. San Pedro Zacatenco, Del. Gustavo A. Madero, Ciudad de México C.P. 07738, Ciudad de México; México 2009-2013. Conmutador 01 (55) 5729 6000, ext. 46135, www.esfm.ipn.mx, Lic. Mario Chavarría Castañeda. Reserva de derechos al uso exclusivo No. 04-2017-050311035400-203, ISSN: en trámite, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Responsable de la última actualización de este Número, Unidad de Tecnología Educativa y Campus Virtual ESFM, Ing. Juan Manuel Figueroa Flores, Av. "Instituto Politécnico Nacional" S/N, Edificio 9, U.P. Adolfo López Mateos, Col. San Pedro Zacatenco, Del. Gustavo A. Madero, Ciudad de México, C.P. 07738, fecha de última modificación, 14 de agosto de 2020. Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor de la publicación.  Liga de acceso: https://www.esfm.ipn.mx/jornadas.html

## Palabras del director

Buenos días a todos, bienvenidos a la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional, una de las mejores Escuelas y de las más emblemáticas del Instituto, aunque para nosotros siempre será la mejor, por muchas razones que así lo justifican.

Hace dos años, un grupo de personas entusiastas, conformado por compañeros docentes y alumnos, comenzaron con esta aventura, la cual cada año ha ido cobrando más relevancia. Esto nos da mucho gusto, porque se está cumpliendo con el objetivo debido al cual se crearon estas Jornadas:

Generar un espacio de reflexión e intercambio sobre investigaciones educativas, el desarrollo de diseños didácticos y sobre divulgación de la ciencia, con el fin de que la discusión sobre dichas temáticas sea un medio de difusión entre docentes, estudiantes y egresados, y de divulgación para el público en general.

La divulgación es un aspecto fundamental de las ciencias; consiste en dar a conocer al público en general, pero sobre todo a los niños de los niveles básicos: primaria, secundaria y medio superior, lo que es la ciencia y cómo es que ésta explica muchos fenómenos de la naturaleza, para entenderla mejor y que estén mejor informados. Pero además para que le pierdan el miedo a las ciencias duras como son la física y las matemáticas, ya que, junto con otras ciencias como la química y la biología, son la base para tener un mejor conocimiento y entendimiento de la naturaleza, ya que así sabremos cómo cuidarla

Otro aspecto de estas Jornadas es el de las innovaciones que se hacen en la didáctica de las ciencias, con el propósito de mejorar los métodos de enseñanza y aprendizaje. Con esto se pretende: incrementar el gusto por las ciencias, que los jóvenes salgan mejor formados, y con ello elevar los índices de aprobación, así como la eficiencia terminal; esto es, que cada vez un mayor porcentaje de los alumnos que ingresan logren egresar.

El tercer aspecto es dar a conocer los resultados de los proyectos de investigación educativa que se llevan a cabo, no solamente en nuestra Escuela, sino en otras unidades académicas del Instituto, así como de otras instituciones.

Es un gusto recibir a niños de los niveles básicos, primaria y secundaria, así como a profesores y alumnos de los niveles medio superior y superior; en particular, ver su entusiasmo e interés por participar en estas Jornadas con el fin de acercarse al conocimiento de las ciencias, para que con éstas puedan conocer y entender mejor el mundo en que viven.

Espero que algunos de los niños que están presentes, los veamos en un futuro no muy lejano ingresar a esta Escuela, para que con la formación que adquieran coadyuven al desarrollo del país, porque se necesita formar personas como lo hace el IPN y nuestra Escuela de una manera profesional con vocación de servicio, que retribuyan a la sociedad los medios que aportaron para su formación, poniendo sus conocimientos al servicio del país.

Reitero mis felicitaciones al Comité Organizador, deseándoles todo el éxito en esta 3ª Edición de las Jornadas Académicas de Didáctica de las Ciencias.

**Divulgación**

Esta sección contiene artículos elaborados por alumnos de secundaria, bachillerato y educación superior.

# ¿Qué importancia tiene calcular la expansión decimal de π?

Abigail de la Cruz Medel[1], Gustavo González Ramos[2], Ricardo Medel Esquivel[3]
adelacruzmedel@gmail.com

## Introducción

El 14 de marzo de 2019 Google anunció haber alcanzado un nuevo récord mundial: el cálculo de más de 31 billones de cifras decimales de π (Haruka, 2019). Esta noticia plantea varias interrogantes, entre las que podemos mencionar: ¿Qué importancia tiene este nuevo récord? ¿Por qué alguien se tomaría la molestia de calcular π con tanta precisión? ¿Cuál es la utilidad de un cálculo como este? Y, por supuesto, ¿cómo se realiza?


El presente artículo tiene su origen en estas o parecidas interrogantes. Para responderlas investigamos un poco acerca del número π: su historia, los métodos que han servido para calcularlo y la importancia de este cálculo en nuestros días. Con la intención de tener una mayor claridad de ideas, también escribimos sendos programas en lenguaje Python que ejecutan algunos de los algoritmos para calcular las cifras de π, entre ellos el de los hermanos Chudnovsky, en el cual está basado el cálculo de Google; estos programas están disponibles libremente para todo lector motivado que desee experimentar por sí mismo este cálculo[4].

La estructura del artículo es la siguiente: en la sección 1 se presenta una síntesis de la historia de las aproximaciones del número π, desde el antiguo Egipto hasta la actualidad; en la sección 2 comparamos el desempeño (en términos del número de cifras exactas que dan por cada iteración) de algunos algoritmos para aproximar el valor de π, lo cual nos da una mejor idea de por qué el algoritmo de los hermanos Chudnovsky es el preferido actualmente para batir records; como conclusión, en la última sección y con base en lo expuesto en las secciones precedentes, ofrecemos una respuesta a la pregunta del título.

## 1. Historia de las aproximaciones para el valor numérico de π

En cualquier círculo plano, la razón de la circunferencia al diámetro da siempre el mismo valor. Por eso decimos “el círculo”, pues no es necesario clasificar a los

---

[1] Secundaria, tercer año. Secundaria Oficial No. 30.
[2] Maestría. Profesor en la FES-Acatlán, UNAM
[3] Doctorado, cuarto año. CICATA-Legaria, IPN / ICF, UNAM.
[4] El código que implementamos está alojado en https://github.com/Medetl/Pi

círculos, como se hace con los triángulos: hay un solo tipo de círculo; dos círculos cualesquiera solamente se pueden distinguir por la escala en que están dibujados. Esa razón constante, de la circunferencia al diámetro de la circunferencia, es el número π.

El símbolo π (pi) es una letra del alfabeto griego, inicial de la palabra "περιΦρεια" que significa periferia, y es usada oficialmente en la simbología matemática desde 1706 (Navarro, 2011).

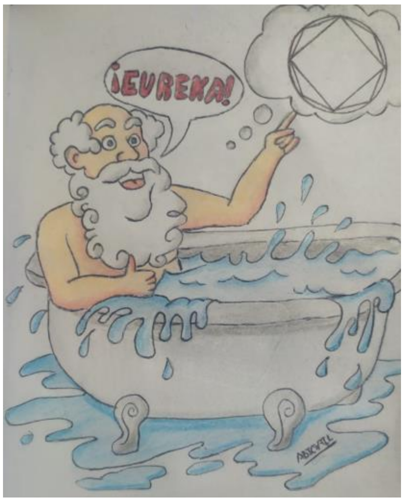
El número π interviene en las fórmulas para calcular el perímetro (circunferencia) y el área de un círculo, así como en la del volumen de una esfera. En la escuela se acostumbra usar π = 3.1416 como buena aproximación para fines prácticos. Sin embargo, sus cifras decimales no terminan allí; de hecho, nunca terminan porque π es un número irracional: no existe una fracción exactamente igual a π. Esto fue demostrado por Johann Heinrich Lambert en 1761 (Blatner, 2003).

En la expansión decimal de un número irracional no es posible hallar un periodo, esa cadena de cifras que se repita una y otra vez hasta el infinito en la expansión decimal de algunas fracciones[5].

En general, hallar aproximaciones al valor de números irracionales no es asunto sencillo (Niven, 1961). En el caso de π, la búsqueda de mejores aproximaciones se ha intentado desde hace unos cuatro mil años, primero por su utilidad práctica y luego por el interés matemático y computacional del problema en sí mismo. En estos cuatro mil años de historia podemos reconocer tres épocas, caracterizadas por la técnica matemática usada o los recursos empleados.

### 1.1 Primera época: aproximaciones geométricas.

En la antigüedad los métodos para calcular el valor de π estaban basados en la geometría, porque el problema de verdadero interés era hallar el cuadrado de área equivalente a un círculo dado. En muchos lugares se aproximó el valor numérico de π mediante alguna fracción adecuada, y fue utilizado principalmente en la construcción de templos (Blatner, 2003). Estas fracciones ofrecían poca exactitud: una o dos cifras decimales correctas; poco a poco fueron desarrollándose mejores cálculos, como puede apreciarse en la Tabla I, que resume los hechos más notables sobre la aproximación de π en la antigüedad.




Arquímedes desarrolló un método para calcular la circunferencia, y con esto encontró una aproximación al número π (Torija, 2007). Su método consiste en aproximar la circunferencia mediante dos polígonos, uno inscrito, de perímetro

[5] Ver "¿Existen patrones en la expansión decimal de las fracciones?" en este mismo número de la revista de las Jornadas Académicas de Didáctica de las Ciencias 2020 para mayores detalles sobre la expansión decimal de las fracciones.

menor que el círculo, y otro circunscrito, de perímetro mayor; el valor real de la circunferencia debe ser un valor intermedio entre los perímetros de los dos polígonos empleados. Al aumentar la cantidad de lados de los polígonos mejora la aproximación. Arquímedes usó polígonos de 96 lados en sus cálculos. Posteriormente, otros matemáticos usaron este método para mejorar el cálculo de π.

Tabla I.

*Cronología de los cálculos más notables de π en la antigüedad.*

| **Año** | **Pueblo o personaje** | **Aproximación para π** |
|---|---|---|
| 2000 a. C. | Babilonia | 25/8 = 3.125 |
| 1650 a. C. | Egipto | 22/7 = 3.14285714... |
| 900 a. C. | India | 339/108 = 3.13888... |
| 200 a. C. | Arquímedes | 223/71 = 3.14084507 |
| 150 d. C. | Claudio Ptolomeo | 377/120 = 3.141666... |
| 475 d. C. | Zu Chongzhi | 355/113 = 3.14159292 |

Nota: Se señalan en rojo las cifras correctas de la aproximación registrada.

### 1.2 Segunda época: aproximaciones analíticas.

A partir del siglo XV los cálculos de π comenzaron a cimentarse en el empleo de series infinitas y tener un interés puramente matemático. Madhava fue el primero en realizar un cálculo de este tipo, basándose en su propio descubrimiento de lo que luego se conocería como la serie de Leibniz:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots,$$

aunque su fórmula tenía, al parecer, más bien esta otra forma (Navarro, 2011):

$$\frac{\pi}{4} = \sqrt{12}\left(1 - \frac{1}{3 \times 3} + \frac{1}{5 \times 3^2} - \frac{1}{7 \times 3^3} + \ldots\right)$$

La Tabla II registra los cálculos más notables de esta segunda etapa histórica.

Tabla II.

*Cronología de los cálculos más notables de π basados en series infinitas.*

| **Año** | **Personaje** | **Decimales correctos de π** |
|---|---|---|
| 1400 | Madhava de Sangamagrama | 13 |
| 1593 | Adriaan van  Roomen | 16 |
| 1596 | Ludolph van Ceulen | 35 |

| | | |
|---|---|---|
| 1699 | Abraham Sharp | 71 |
| 1719 | Thomas Fantet de Lagny | 112 |
| 1844 | Johann Martin Zacharias Dase | 200 |
| 1847 | Thomas Clausen | 250 |
| 1854 | Richter | 500 |
| 1875 | William Shanks | 527 |
| 1947 | D. F. Ferguson | 808 |
| 1949 | D. F. Ferguson y J. W. Wrench | 1,120 |

Nota: van Ceulen logró fama por su cálculo y por un tiempo π fue llamado número de Ludolph; Shanks publicó 707 decimales, pero no todos resultaron ser correctos; Ferguson realizó sus cálculos con la ayuda de una calculadora.

### 1.3 Tercera época: aproximaciones calculadas mediante computadoras.

El cálculo de π tuvo un gran impulso a principios del siglo XVIII, cuando James Gregory descubrió la serie:

$$arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots,$$

y John Machin dedujo la fórmula que lleva su nombre:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \times arctan(\frac{1}{5}) - arctan(\frac{1}{239})$$

El éxito creciente motivó el estudio de nuevas series, más eficientes para el cálculo de π. En el siglo XX, Srinivasa Ramanujan (ver imagen) descubrió una asombrosa cantidad de fórmulas en las que interviene π.

En 1989 David y Gregory Chudnovsky publicaron una fórmula basada en uno de los resultados de Ramanujan que, cuando se programa en una computadora, se convierte en un algoritmo de gran eficiencia para el cálculo de π:

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)! \, (13591409 + 545140134k)}{(3k)! \, (k!)^3 640320^{3k + 3/2}}$$

La Tabla III resume los hechos sobre el cálculo de π que se han realizado mediante el uso de computadoras.

Tabla III.

*Cronología de los cálculos más notables de π en la era de las computadoras.*

| **Año** | **Personaje** | **Decimales de π** |
|---|---|---|
| 1949 | J. W. Wrench y L. B. Smith | 2,037 |
| 1958 | Francois Genuys | 10,000 |
| 1961 | Daniel Shanks y J. W. Wrench | 100,265 |
| 1973 | Jean Gilloud y Martin Bouyer | 1,001,250 |
| 1983 | Yasumasa Kanada y Yasunori Ushiro | 10,013,395 |
| 1987 | Yasumasa Kanada, et. al. | 134,214,700 |
| 1989 | Hermanos Chudnovsky | 1,011,196,691 |
| 2002 | Yasumasa Kanada | 1,241,100,000,000 |
| 2009 | Daisuke Takahashi | 2,576,980,370,000 |
| 2010 | Fabrice Bellard | 2,699,999,989,951 |
| 2011 | Shigeru Kondo | 10,000,000,000,000 |
| 2018 | Peter Trueb | 22,400,000,000,000 |
| 2019 | Emma Haruka Iwao | 31,000,000,000,000 |
| 2020 | Timothy Mullican | 50,000,000,000,000 |

Notas: Cada nuevo cálculo a menudo implicó el uso de técnicas novedosas; en el caso de Haruka, es la primera vez que se usa computación en la nube (tomó 121 días de cómputo).

Fuente para los hechos más recientes: http://www.numberworld.org/y-cruncher/

## 2. Comparación de algunos algoritmos utilizados para calcular π

Podemos utilizar las fórmulas de Leibniz, Madhava u otras similares (existe una gran cantidad de ellas) para calcular el número π. Recordemos también que la fórmula de Leibniz tiene este aspecto:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Observándola, podemos convencernos de que la precisión del cálculo aumenta al incrementarse el número de términos considerados en la suma. No recomendamos comprobarlo mediante un cálculo manual, más práctico e interesante es programar un algoritmo que haga este cálculo en una computadora[6].

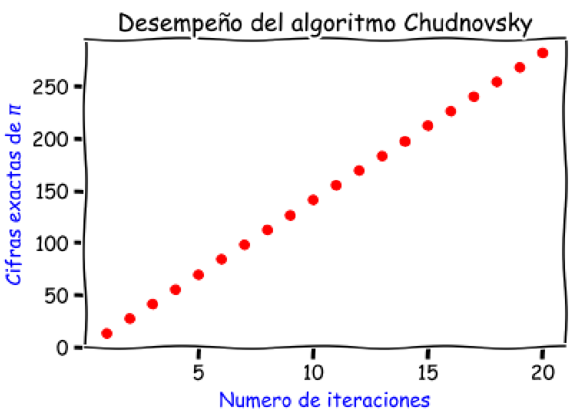
Un algoritmo es una secuencia ordenada de pasos que permiten realizar un cálculo o resolver un problema; las operaciones que se repiten una y otra vez en un algoritmo se conocen como iteraciones.

En fórmulas como la de Leibniz podemos ver que la suma de una nueva fracción corresponde a una iteración más en el algoritmo. Así, a mayor cantidad de iteraciones esperaríamos mayor precisión en el valor calculado de π. Bien, pero ¿cuánta precisión exactamente?

Al correr el algoritmo que implementa la fórmula de Leibniz encontramos que son necesarias 100 iteraciones para obtener el primer decimal correcto en el desarrollo de π. 10,000 iteraciones dan apenas 3 cifras correctas y para obtener 5 necesitamos 1,000,000 de iteraciones. Por tanto, el algoritmo basado en la fórmula de Leibniz no parece ser bueno.

La fórmula de Madhava da mejores resultados. En este caso 3 iteraciones nos dan la primera cifra decimal correcta del número π y el número de cifras correctas aumentan a razón promedio de 1 por cada 2 iteraciones.

La situación mejora notablemente con el algoritmo basado en la fórmula de los hermanos Chudnovsky, cuyo desempeño hemos graficado en la figura adjunta. En este caso cada iteración aumenta en promedio 14 cifras decimales exactas al cálculo, de modo que bastan 8 iteraciones para obtener más de 100 cifras correctas de π.




Existen otros algoritmos eficientes para calcular π, como los de Brent-Salamin y el de los hermanos Jonathan y Peter Borwein, sin embargo, el más utilizado es el de los hermanos Chudnovsky.

Para seleccionar un algoritmo dedicado a un cálculo tan exhaustivo es necesario considerar no solamente su desempeño (en términos de las cifras exactas por cada iteración), sino también los recursos computacionales utilizados, y aquí es donde el Chudnovsky parece superar a todos los demás. En nuestro caso, usando una laptop calcular 100,000 dígitos de π tomó 6 horas de cálculo.

[6] El código que implementamos está alojado en https://github.com/Medetl/Pi

## Conclusión:

Existe una fascinación permanente por el número π, como podemos comprobarlo con la historia resumida en este artículo. Sin embargo, el cálculo de π tiene un interés puramente matemático pues, como vimos, las series que nos sirven como fórmulas para este cálculo tienen desempeños muy diferentes, lo que sin duda debe plantear problemas de investigación a los matemáticos de nuestra época.

Determinar millones de cifras decimales de π no tiene la finalidad práctica de emplear el resultado en ningún cálculo. Su importancia radica, más bien, en que sirve para poner a prueba los límites de la capacidad de supercomputadoras, así como la eficiencia de nuevas técnicas de cómputo. Fines para los cuales es útil plantear problemas de respuesta conocida que exijan un trabajo intensivo del equipo, y π reúne esos elementos. Y seguramente también se calcula por el solo placer de conocerlo mejor.

**Ilustraciones**: Abigail de la Cruz Medel

## Referencias

Blatner, D. (2003). *El encanto de **π**.* Aguilar.

Haruka, E. (2019). *Pi in the sky: Calculating a record-breaking 31.4 trillion digits of Archimedes' constant on Google Cloud*. Google Cloud. Recuperado el 05/02/2020: https://cloud.google.com/blog/products/compute/calculating-31-4-trillion-digits-of-archimedes-constant-on-google-cloud

Navarro, J. (2011). *Los secretos del número **π**: ¿por qué es imposible la cuadratura del círculo?* RBA.

Niven, I. (1961). *Numbers: rational and irrational*. Random House.

Torija, R. (2007). *Arquímedes: Alrededor del círculo*. Nivola.

# ¿Con qué frecuencia aparece cada dígito en el desarrollo decimal del número π?

Karla Patricia de la Cruz Medel [7], Gustavo González Ramos [8], Ricardo Medel Esquivel[9]
karla.medel05@gmail.com

## Introducción

En algunos sitios de internet[10] es posible consultar el valor numérico de π con una enorme lista de cifras decimales. Observarla con algo de atención puede despertar la curiosidad y encaminarnos a preguntas interesantes.

```
3.1415926535897932384626433
   8327950288419716939937510
   5820974944592307816406286
   2089986280348253421170679
   8214808651328230664709384
   4609550582231725359408128
   4811174502841027019385211
   0555964462294895493038196
   4428810975665933446128475
   6482337867831652712019091
   4564856692346034861045432
   6648213393607260249141273
   7245870066063155881748815
   2092096282925409171536436
   7892590360011330530548820
   4665213841469519415116094
   3305727036575959195309218
   6117381932611793105118548
   0744623799627495673518857
   5272489122793818301194912
   9833673362440656643086021
   3949463952247371907...
```

Los 10 dígitos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9) aparecen en la expansión decimal de π, pero ¿aparecen con la misma frecuencia? ¿O uno en particular aparece más frecuentemente que los demás? Siendo infinita la expansión decimal de π, ¿existe una manera de saberlo?

En este artículo exploramos estas cuestiones. Tras investigar el tema, dimos con el concepto de número normal. Un número normal, en base 10, es aquel en cuya expansión decimal los 10 dígitos aparecen con la misma frecuencia. Entonces la pregunta inicial (la del título) puede reformularse así: ¿es π un número normal?

Una manera práctica e interesante de buscar la respuesta, aunque no puede tomarse como una prueba definitiva, es contar directamente la aparición de cada dígito en una lista como la mencionada al principio. Esto implica programar una computadora para que realice esta tarea. Nosotros procedimos así, escribimos un programa que calcula la expansión decimal de π y genera tablas y gráficas de la frecuencia con que aparecen los dígitos; el código está disponible libremente en internet (en las siguientes secciones damos más detalles sobre él).

## Números normales

Nuestro sistema de numeración usual tiene como base al 10, de modo que para escribir cualquier número podemos emplear 10 cifras (símbolos) distintas, los dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

---

[7] Medio Superior, primer año
[8] Maestría concluida, profesor de la FES-Acatlán, UNAM
[9] Doctorado, cuarto año. CICATA-Legaria, IPN
[10] Por ejemplo en The World of π: http://www.pi314.net/eng/accueildecimales.php

Existen sistemas de numeración distintos, como el binario (base 2), cuyos dígitos son 0 y 1. Cualquier número puede escribirse en binario como una cadena de ceros y unos. Tal es el sistema que utilizan internamente las computadoras para su funcionamiento, como es bien sabido. Otros sistemas útiles tienen como base al 8, al 16, al 20 o al 60, estos últimos empleados en culturas antiguas.

Un número, cualquiera, puede escribirse en cualquier base y también puede convertirse de una base a otra. Lo anterior nos lleva a precisar algunas definiciones.

**Definición 1**: Un *número normal*, en base 10, es aquel en cuya expansión decimal los 10 dígitos aparecen con la misma frecuencia.

**Definición 2**: Un *número absolutamente normal* es un número que es normal en cualquier base.

Estos conceptos fueron introducidos por Émile Borel en 1909 y estudiados por W. Sierpinsky. En 1992 se dio a conocer un manuscrito incompleto de Alan Turing que contiene resultados muy importantes sobre este tema (Morales, 2013).

Otra manera de expresar el concepto de número normal es considerar que en su expansión decimal toda secuencia de dígitos tiene la misma probabilidad de aparecer. De modo que si estas secuencias se piensan como resultados posibles de un juego de azar entonces un número normal sería como el historial de un juego no truqueado sino completamente legal (Morales-Luna, 2013).

Se sabe que casi todos los números irracionales son normales pero no ha sido posible hasta ahora demostrar que π, Φ, e, √2 o ln(2) son normales, (Navarro, 2011). Naturalmente, tampoco se sabe si son absolutamente normales. Así pues, tan solo se sospecha que π es normal y las pruebas computacionales refuerzan esta idea.

## Exploración computacional del número π

Existen muchos algoritmos para calcular los dígitos de π. Entre todos ellos el preferido por su alta eficiencia es el de los hermanos Chudnovsky[11]. Nosotros usamos este algoritmo para calcular varias cantidades de dígitos de π y elaborar algunas de las tablas y graficas de frecuencias mostradas en la siguiente página[12].

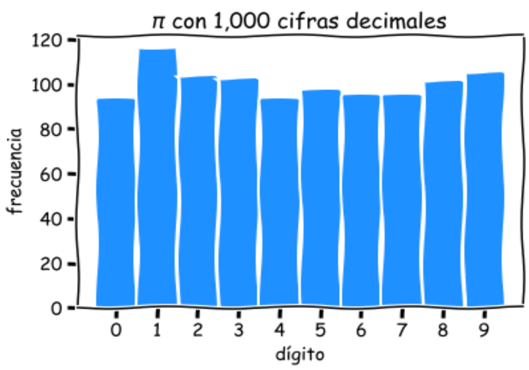
Tabla I: Frecuencia de aparición de los dígitos en π para varias cantidades de decimales.

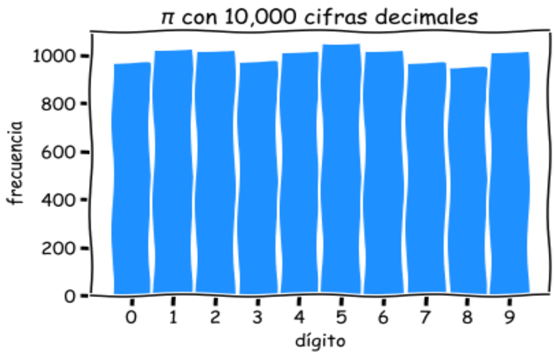
| **Dígitos / Frec.** | **1,000** | **10,000** | **100,000** | **1,000,000** | **1,000,000,000** | **1,000,000,000,000** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 93 | 968 | 10,000 | 99,959 | 99,993,942 | 99,999,485,134 |
| **1** | 116 | 1026 | 10,138 | 99,758 | 99,997,334 | 99,999,945,664 |
| **2** | 103 | 1021 | 9,908 | 100,026 | 100,002,410 | 100,000,480,057 |
| **3** | 102 | 974 | 10,025 | 100,229 | 99,986,911 | 99,999,787,805 |

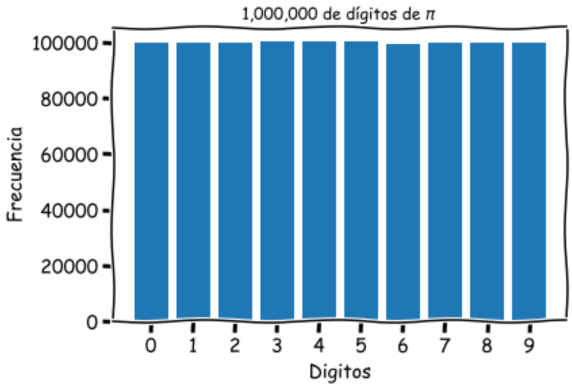
[11] Ver "¿Qué importancia tiene calcular la expansión digital de π?" en este mismo número de la revista de las Jornadas Académicas de Didáctica de las Ciencias 2020 para mayores detalles sobre este tema.
[12] El código que implementamos está alojado en https://github.com/Medetl/Pi

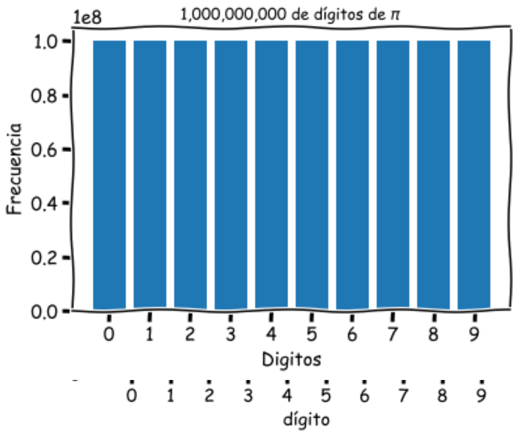
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **4** | 93 | 1012 | 9,970 | 100,230 | 100,011,958 | 100,000,357,857 |
| **5** | 97 | 1048 | 10,026 | 100,359 | 99,998,885 | 99,999,671,008 |
| **6** | 95 | 1021 | 10,028 | 99,548 | 100,010,387 | 99,999,807,503 |
| **7** | 95 | 969 | 10,025 | 99,800 | 99,996,061 | 99,999,818,723 |
| **8** | 101 | 947 | 9,978 | 99,985 | 100,001,839 | 100,000,791,469 |
| **9** | 105 | 1014 | 9,902 | 100,106 | 100,000,273 | 99,999,854,780 |

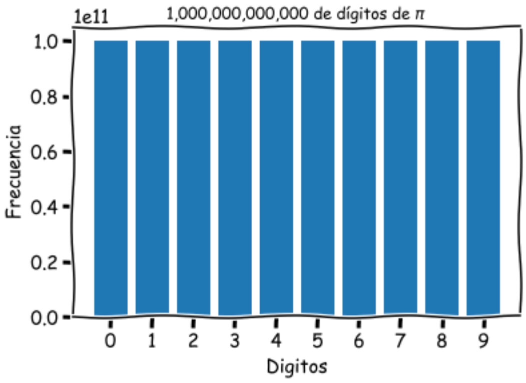
Nota: Elaboración propia hasta 100,000 dígitos; en adelante, Fuente: Posamentier, 2013.




Aunque 1 billón de dígitos puede parecer una cantidad enorme, hay que recordar que la expansión decimal completa de π tiene una infinidad de ellos. Por tanto, aunque las tablas y gráficas anteriores nos muestran que los dígitos aparecen con frecuencias muy similares esto no puede tomarse como una prueba de que π es un número normal; dicha prueba tendría que realizarse, al parecer, mediante argumentos puramente matemáticos.

También es necesario notar que, aunque las tablas anteriores parecen indicar que π es normal en base 10, nada nos dicen acerca de su normalidad en otras bases; sería necesario convertir π a una nueva base para darnos una idea de si en ella es o no normal.

## Conclusión

La cuestión de si los 10 dígitos aparecen con la misma frecuencia en la expansión decimal de π (en base 10) permanece abierta, en este momento nadie conoce la respuesta. Se cree que π es un número normal, es decir, que los dígitos aparecen con la misma frecuencia, pero todavía no se dispone de un argumento contundente. Construir argumentos de esta naturaleza ha mostrado ser tremendamente difícil, al grado de que solo existen para casos muy particulares de números construidos específicamente para esos fines.

Por ejemplo, se ha demostrado que el número:

$$C_{10} = 0.123456789101112131415\ldots,$$

llamado Constante de Champernowne, es normal. Pero el caso de π todavía es un misterio.

**Ilustraciones**: Karla Patricia de la Cruz Medel

## Referencias

Morales-Luna, G. (2013). *Números computables y números normales*. Miscelánea Matemática **56** 27-39.

Navarro, J. (2011). *Los secretos del número **π**: ¿por qué es imposible la cuadratura del círculo?* RBA.

Posamentier, A. S., & Lehmann, I. (2013). *Pi: A Biography of the World's Most Mysterious Number*. Prometheus Books.

# ¿Hay patrones en la expansión decimal de las fracciones?

Luis Ángel Vázquez Medel[13], Eduardo Rubio Jiménez[14], Gustavo González Ramos[15], Ricardo Medel Esquivel[16]
rmedele1500@alumno.ipn.mx

## Introducción


Las fracciones son números que usamos para representar porciones de una o más cantidades unitarias. Una fracción se escribe de la forma $\frac{a}{b}$, donde el entero $a$ se llama numerador y el entero $b \neq 0$, denominador. Si $a$ y $b$ no tienen ningún factor común se dice que la fracción es *irreducible*; cuando $a < b$ se dice que la fracción es *propia*. En este artículo hablaremos únicamente de fracciones propias e irreducibles.

Las fracciones tienen la mala fama de ser un tema muy difícil, pero cuando analizamos con atención su representación decimal ofrecen un aspecto de verdad interesante. Si divides el numerador entre el denominador para obtener la representación o expansión decimal de una fracción puedes comprobar que ocurre uno de estos tres casos:

1) La expansión decimal termina.
   Ejemplo: $\frac{1}{8} = 0.125$.

2) La expansión decimal no termina, sino que es infinita y periódica, y el período comienza inmediatamente después del punto decimal.
   Ejemplo: En $\frac{2}{7} = 0.57142857142857$ ... el período es 571428.

3) La expansión decimal es infinita y periódica, pero el período no inicia inmediatamente después del punto decimal, sino detrás de algunas cifras.
   Ejemplo: En $\frac{3}{44} = 0.06818181...$ el período es 81 y comienza tras el 06.

Surgen entonces algunas cuestiones: ¿Podemos saber el tipo de expansión decimal que tendrá una fracción en particular sin hacer la división? ¿Qué determina que la expansión decimal de una fracción resulte finita o infinita?

[13] Secundaria, segundo año. Secundaria Oficial No. 30.
[14] Secundaria, segundo año. Secundaria Oficial No. 978.
[15] Maestría. Profesor de la FES-Acatlán, UNAM.
[16] Doctorado, cuarto año. CICATA-Legaria, IPN / ICF, UNAM.

Más todavía. En nuestro segundo y tercer ejemplos si, curiosamente, tomamos cada uno de los períodos (571428 y 81), los separamos en dos mitades y sumamos éstas, obtenemos: 571 + 428 = 999 y 8 + 1 = 9, resultados que son cadenas de nueves. Algo similar ocurre si partimos en tres el período 571428 y sumamos las tres partes: 57 + 14 + 28 = 99. ¿Es esta una propiedad general de los períodos de las fracciones? ¿Qué otros patrones podemos descubrir en ellos?

En este artículo compartimos las respuestas que encontramos en nuestra investigación, tras analizar muchos casos particulares con la ayuda de un programa computacional y luego de buscar información sobre el tema.

**Un programa para analizar la expansión decimal de las fracciones**

Encontrar a mano la expansión decimal de una fracción no es difícil, pero puede ser una tarea monótona y agotadora. Hasta con una buena calculadora pueden surgir complicaciones, porque ¿cuántas cifras decimales te podría mostrar?

Afortunadamente podemos programar una computadora para que haga la división por nosotros y nos devuelva el resultado con muchísimos dígitos decimales. La siguiente imagen muestra la salida de un programa escrito en el lenguaje Python al que se le han solicitado 1,000 cifras de la expansión decimal

```python
from decimal import *
import math
```

```python
a=1
b=97
getcontext().prec = 1000
fraccion = Decimal(a) / Decimal(b)
print(fraccion)
```

```
0.0103092783505154639175257731958762886597938144329896907216494845360824742268041237113402061855670103092783505154
639175257731958762886597938144329896907216494845360824742268041237113402061855670103092783505154639175257731958762
886597938144329896907216494845360824742268041237113402061855670103092783505154639175257731958762886597938144329896
907216494845360824742268041237113402061855670103092783505154639175257731958762886597938144329896907216494845360824
742268041237113402061855670103092783505154639175257731958762886597938144329896907216494845360824742268041237113402
061855670103092783505154639175257731958762886597938144329896907216494845360824742268041237113402061855670103092783
505154639175257731958762886597938144329896907216494845360824742268041237113402061855670103092783505154639175257731
958762886597938144329896907216494845360824742268041237113402061855670103092783505154639175257731958762886597938144
3298969072164948453608247422680412371134020618556701030927835051546391752577319587628865979
```

de $\frac{1}{97}$ .

De este modo podemos identificar el período de una fracción. Mejor aún, podemos hacer que el programa nos diga de una vez cuál es el período de una fracción dada. Esto precisamente fue lo que hicimos, y con ayuda del programa elaborado pudimos observar varias propiedades interesantes. En la siguiente sección hacemos una lista de algunas de ellas[17].

Si bien estas propiedades ya son conocidas por los matemáticos desde hace mucho tiempo (Gardner, 1983), son poco conocidas por el público y resultó muy interesante descubrir nosotros mismos algunas de ellas.

[17] El programa implementado puede consultarse y descargarse en https://github.com/Medetl/Decimales

## Patrones o propiedades de la expansión decimal de las fracciones

Nuestro resultado y referencia principal es la Tabla I.

Tabla I. *Períodos de los inversos de números primos menores que 100*.

| Fracción | Período | Longitud |
|---|---|---|
| 1/3 | 3 | 1 |
| 1/7 | 142857 | 6 |
| 1/11 | 09 | 2 |
| 1/13 | 076923 | 6 |
| 1/17 | 0588235294117647 | 16 |
| 1/19 | 052631578947368421 | 18 |
| 1/23 | 0434782608695652173913 | 22 |
| 1/29 | 0344827586206896551724137931 | 28 |
| 1/31 | 032258064516129 | 15 |
| 1/37 | 027 | 3 |
| 1/41 | 02439 | 5 |
| 1/43 | 023255813953488372093 | 21 |
| 1/47 | 021765957446808510638297872340425531914893617 | 46 |
| 1/53 | 0188679245283 | 13 |
| 1/59 | 0169491525423728813559322033898305084745762711864406779<br>661 | 58 |
| 1/61 | 0163934426229508196721311475409836065573770491803278688<br>52459 | 60 |
| 1/67 | 014925373134328358208955223880597 | 33 |
| 1/71 | 01408450704225352112676056338028169 | 35 |
| 1/73 | 01369863 | 8 |
| 1/79 | 0126582278481 | 13 |
| 1/83 | 01204819277108433734939759036144578313253 | 41 |
| 1/89 | 01123595505617977528089887640449438202247191 | 44 |
| 1/97 | 0103092783505154639175257731958762886597938144329896907<br>21649484536082474226804123711340206185567 | 96 |

**Nota**: Se muestra la fracción, su período decimal correspondiente y la longitud o cantidad de cifras decimales del período.
**Fuente**: Elaboración propia.

Centrar la atención en las fracciones cuyo denominador es un número primo resulta importante porque de este caso fundamental puede derivarse el análisis de casos en que el denominador sea un número compuesto. Ahora bien, hay dos primos que no aparecen en la Tabla I: el 2 y el 5. Estos son los factores primos de 10, el número base de nuestro sistema de numeración de uso cotidiano, razón por la cual muestran un comportamiento especial, tal y como indicamos en las propiedades 1 a 4 de la siguiente lista.

1. **Una fracción propia e irreducible cuyo denominador solamente tenga como factores a 2 o a 5 tendrá una expansión decimal finita.**

   Ejemplo: En $\frac{3}{20} = 0.15$, $20 = 2^2 \times 5$ y la expansión decimal tiene solo 2 cifras.

   Explicación: Este tipo de fracción siempre puede transformarse en una fracción decimal (una en la que el denominador sea potencia de 10) y, por ello, tendrá una expansión decimal finita. En nuestro ejemplo:
$$\frac{3}{20} = \frac{3}{2^2 \times 5} \times 1 = \frac{3}{2^2 \times 5} \times \frac{5}{5} = \frac{3 \times 5}{2^2 \times 5^2} = \frac{15}{(2 \times 5)^2} = \frac{15}{10^2} = \frac{15}{100} = 0.15$$
   Si el denominador de una fracción propia e irreducible tiene un factor distinto a 2 y a 5, su desarrollo decimal será infinito.

2. **La expansión decimal de una fracción de la forma $\frac{1}{2^n}$ tiene *n* cifras decimales, mismas que corresponderán al valor numérico de $5^n$ más, posiblemente, algunos ceros escritos a la izquierda, si el número de cifras de $5^n$ es menor que *n*.**

   Ejemplo: En $\frac{1}{16} = 0.0625$, $16 = 2^4$ y la expansión decimal contiene 4 cifras, que corresponden al valor numérico de $5^4 = 625$ más un 0 a la izquierda.

   Explicación: Este es un caso particular de la propiedad anterior. En el ejemplo:
$$\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} \times 1 = \frac{1}{2^4} \times \frac{5^4}{5^4} = \frac{1 \times 5^4}{2^4 \times 5^4} = \frac{5^4}{(2 \times 5)^4} = \frac{5^4}{10^4} = \frac{625}{10000} = 0.0625$$

3. **La expansión decimal de una fracción de la forma $\frac{1}{5^n}$ tiene *n* cifras decimales, mismas que corresponden al valor numérico de $2^n$ más, posiblemente, algunos ceros escritos a la izquierda, si el número de cifras de $2^n$ es menor que *n*.**

   Ejemplo: En $\frac{1}{25} = 0.04$, $25 = 5^2$ y la expansión decimal contiene 2 cifras, que corresponden al valor numérico de $2^2 = 4$ más un 0 a la izquierda.

   Explicación: Este es otro caso particular de la primera propiedad de la lista. En nuestro ejemplo:
$$\frac{1}{25} = \frac{1}{5^2} \times 1 = \frac{1}{5^2} \times \frac{2^2}{2^2} = \frac{1 \times 2^2}{5^2 \times 2^2} = \frac{2^2}{(2 \times 5)^2} = \frac{2^2}{10^2} = \frac{4}{100} = 0.04$$

4. **Si $p$ es primo, el período de la expansión decimal de $\frac{1}{p}$ empieza inmediatamente después del punto decimal; si la fracción es de la forma $\frac{1}{2^n \times 5^m \times p}$ el período empieza después de una cantidad de cifras decimales igual al exponente mayor, *n* o *m*.**

Ejemplo: En $\frac{1}{60} = 0.01666\ldots$, $60 = 2^2 \times 5 \times 3$ y el período, 6, empieza 2 cifras decimales después del punto.

Explicación: Se deriva de la primera propiedad, pues este tipo de fracción puede reescribirse como producto de una fracción decimal por otra no decimal. El efecto de la primera sobre la segunda consiste en desplazar el período tantas cifras decimales a la derecha como indique el mayor de los exponentes, *m* o *n*. En nuestro ejemplo:

$$\frac{1}{60} = \frac{1}{2^2 \times 5 \times 3} \times 1 = \frac{1}{2^2 \times 5 \times 3} \times \frac{5}{5} = \frac{5}{(2 \times 5)^2} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{10^2} \times \frac{1}{3} = 0.01666\ldots$$

5. **El período de $\frac{1}{p}$, donde *p* es un número primo, tiene una longitud de, a lo más, $p - 1$ cifras decimales.**

Ejemplo: En $\frac{1}{7} = 0.14285714\ldots$ el período, 142857, tiene una longitud de 6 cifras.

Explicación: Cuando dividimos un número entero entre $p$ hay exactamente $p$ valores posibles para el residuo: 0, 1, 2, …, $p - 1$. Si al realizar la división para determinar la expansión decimal de $\frac{1}{p}$ encontramos un residuo parcial igual a 0 la división termina y, por tanto, la expansión decimal resultará finita. Para que la expansión decimal resulte infinita ningún residuo parcial debe ser 0; así, los residuos parciales solo pueden tomar $p - 1$ valores distintos, y en cuanto uno de ellos se repita se repetirán todos los anteriores, habremos dado con el período. En nuestro ejemplo:

Para $\frac{1}{7}$ los residuos posibles son: 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Al realizar la división vemos que aparecen todos, en este orden: 1, 3, 2, 6, 4, 5, y se repiten.

$$
\begin{array}{r|cccccccc}
 & 0. & 1 & 4 & 2 & 8 & 5 & 7 & \ldots \\ \cline{2-8}
7 & 1 & & & & & & & \\
 & {\color{red}1} & 0 & & & & & & \\
 & & 7 & & & & & & \\ \cline{2-3}
 & & {\color{red}3} & 0 & & & & & \\
 & & 2 & 8 & & & & & \\ \cline{3-4}
 & & & {\color{red}2} & 0 & & & & \\
 & & & 1 & 4 & & & & \\ \cline{4-5}
 & & & & {\color{red}6} & 0 & & & \\
 & & & & 5 & 6 & & & \\ \cline{5-6}
 & & & & & {\color{red}4} & 0 & & \\
 & & & & & 3 & 5 & & \\ \cline{6-7}
 & & & & & & {\color{red}5} & 0 & \\
 & & & & & & 4 & 9 & \\ \cline{7-8}
 & & & & & & & {\color{red}1} & \ldots
\end{array}
$$

6. **Cuando $p$ es primo y $\frac{1}{p}$ tiene un período de $p - 1$ cifras de longitud se obtiene un número cíclico.**

Ejemplo: Como se mostró en el ejemplo anterior, el inverso de 7 tiene un período de 6 cifras: 142857. Estas cifras forman un número cíclico en el sentido que puede apreciarse en la Tabla II.

Tabla II. *Períodos de los múltiplos propios de 1/7*.

| Fracción | Período | Longitud |
|---|---|---|
| 1/7 | 142857 | 6 |
| 2/7 | 285714 | 6 |
| 3/7 | 428571 | 6 |
| 4/7 | 571428 | 6 |
| 5/7 | 714285 | 6 |
| 6/7 | 857142 | 6 |

**Nota**: Todos estos períodos contienen las mismas cifras, empiezan con una distinta, pero siguen el mismo orden.
**Fuente**: Elaboración propia.

Existen diferentes tipos de números cíclicos. Una discusión más extensa sobre esta propiedad puede encontrarse en Gardner (1983).

7. **Si el período de $\frac{1}{p}$ se multiplica por $p$ se obtiene un número entero formado por una hilera de nueves, tantos como cifras tenga la longitud del período.**

Ejemplo: En $\frac{1}{13} = 0.076923076 \ldots$ el período, 076923, consta de 6 cifras y se tiene: $13 \times 076923 = 999999$, resultado que consiste en una cadena de 6 nueves.

Explicación: Supongamos que se desea hallar la fracción generatriz del decimal $x = 0.076923076 \ldots$ Procederíamos identificando en primer lugar la cantidad de cifras en el período: 6. Luego, multiplicando ambos lados de la expresión anterior ($x = 0.076923076 \ldots$) por $10^6$ y restando del resultado los lados correspondientes de la expresión original se tendría: $(10^6 - 1) \times x = 76923$.

Si en esta última expresión sustituimos el valor conocido de $x = \frac{1}{13}$ y realizamos la multiplicación cruzada, obtenemos: $10^6 - 1 = 13 \times 76923$. Pero $10^6 - 1 = 999999$, por tanto $13 \times 76923 = 999999$. Este argumento puede generalizarse.

Esta explicación contiene implícitamente un hecho fundamental para comprender la siguiente propiedad y para construir un algoritmo que calcule el período del inverso de un número primo *p*. Ese hecho fundamental es que el período de $\frac{1}{p}$ puede determinarse al hallar el valor mínimo de *n* tal que $10^n - 1$ resulte divisible entre *p*. Con ese valor de *n* el período será $\frac{10^n - 1}{p}$.

8. **TEOREMA DE MIDY: Si $p > 5$ es primo y la fracción $\frac{1}{p}$ tiene un período de longitud par, entonces la suma de las dos mitades que conforman el período es una cadena de nueves.**

Ejemplo: En $\frac{1}{73} = 0.01369863013\ldots$ el período es $01369863$ y tiene una longitud de 8 cifras. Se tiene entonces que: $0136 + 9863 = 9999$.

Explicación: Llamemos *P* al período de $\frac{1}{p}$, sean *A* y *B* las dos mitades de *P*, cada una de longitud *k*. Entonces, según se dijo en la explicación de la propiedad anterior, *2k* es el valor mínimo del exponente de 10 tal que:

$$\frac{1}{p} = \frac{P}{10^{2k} - 1} = \frac{A \times 10^k + B}{10^{2k} - 1} = \frac{A \times 10^k + B}{(10^k - 1)(10^k + 1)}$$

Ahora bien, la equivalencia entre la primera y la última de estas fracciones implica que *p* divide a $10^k + 1$, porque *p* no puede dividir a $10^k - 1$, en vista de que el mínimo número de la forma $10^n - 1$ divisible entre *p* se obtiene con el exponente *2k*. Esto, a su vez, implica que de la siguiente expresión se obtiene un número entero:

$$\frac{10^k + 1}{p} = \frac{A \times 10^k + B}{10^k - 1} = \frac{A \times (10^k - 1) + A + B}{10^k - 1} = A + \frac{A + B}{10^k - 1}$$

Analizar los casos posibles lleva a concluir que debe ser $A + B = 10^k - 1$, necesariamente, de lo cual se obtiene el resultado deseado, pues $10^k - 1$ es número formado por una cadena de *k* nueves.

La demostración completa puede consultarse en Rademacher (1970). El matemático francés E. Midy publicó una demostración de este teorema en 1836.

9. **TEOREMA DE GINSBERG: Si $p > 5$ es primo y la fracción $\frac{1}{p}$ tiene un período de longitud múltiplo de 3, cuando se divide el período en 3 bloques y se suman el resultado es una cadena de nueves.**

Ejemplo: En $\frac{1}{31} = 0.0322580645161290322\ldots$ el período es $032258064516129$ y tiene una longitud de 15 cifras. Luego: $03225 + 80645 + 16129 = 99999$.

Explicación: Como hicimos anteriormente, llamemos *P* al período de $\frac{1}{p}$, y sean *A*, *B* y *C* las tres partes de *P*, cada una de longitud *k*. Procediendo en analogía a la explicación anterior, *3k* es el valor mínimo del exponente de 10 tal que:

$$\frac{1}{p} = \frac{A \times 10^{2k} + B \times 10^k + C}{10^{3k} - 1} = \frac{A \times 10^{2k} + B \times 10^k + C}{(10^k - 1)(10^{2k} + 10^k + 1)}$$

Y de aquí se puede concluir que *p* debe dividir a $10^{2k} + 10^k + 1$, lo cual lleva a inferir que la siguiente expresión corresponde a un número entero:

$$\frac{10^{2k} + 10^k + 1}{p} = \frac{A \times 10^{2k} + B \times 10^k + C}{10^k - 1} = A \times 10^k + A + B + \frac{A + B + C}{10^k - 1}$$

Y una vez más, analizar los casos posibles nos llevaría a concluir que, necesariamente, $A + B + C = 10^k - 1$, lo cual es una cadena de $k$ nueves. Más detalles de la demostración pueden consultarse en la publicación original de Ginsberg (2004). Una extensa exposición de otras generalizaciones del teorema de Midy, desde un punto de vista avanzado, puede verse en Cala (2015).

## Conclusión

La expansión decimal de las fracciones no es una lista caprichosa de cifras. Al contrario, estas cifras siguen patrones bastante interesantes. Este trabajo no muestra una lista exhaustiva de ellos, lo cual es una buena noticia porque, como puede entreverse en estas páginas, es posible usar una computadora para explorarlos uno mismo y, tal vez, descubrir algo nuevo e interesante.

Retomando lo dicho al principio sobre la mala fama de las fracciones, hacemos notar que conocer las propiedades aquí mostradas muchas veces es útil para simplificar el trabajo al realizar cálculos.

Por ejemplo, al realizar divisiones entre 7 es posible utilizar el hecho de que este denominador genera números cíclicos y su período cumple las condiciones del teorema de Midy.

Así, podemos calcular 13/7 = 1 + 6/7 tan solo calculando la primera cifra de la expansión decimal de 6/7 (8) y recordando que el período de 1/7 es 142857 (algo muy fácil, pues 14, 28, 57 casi es una progresión aritmética), un número cíclico, podemos determinar que 6/7 tiene el período 857142 y por tanto el resultado de la operación es 13/7 = 1.857142… El teorema de Midy puede ayudarnos a recordar el período completo de 1/7, si tan solo recordamos su primera mitad.

**Ilustraciones:** Abigail de la Cruz Medel

## Referencias


Cala Barón, J. C. (2015). *Sobre La Propiedad De Midy*. Tesis Profesional, Universidad Industrial de Santander, Escuela De Matemáticas.

Gardner, M. (1983). *Circo matemático*. Alianza Editorial.

Ginsberg, B. D. (2004) Midy's (Nearly) Secret Theorem-An Extension After

165 Years, *The College Mathematics Journal*, **35**(1), 26-30.

Rademacher, H. A., & Toeplitz, O. (1970). *Números y figuras: matemáticas para todos*. Alianza Editorial.

# ¿Con qué frecuencia aparece cada dígito en el desarrollo decimal del número π?

Karla Patricia de la Cruz Medel [18], Gustavo González Ramos [19], Ricardo Medel Esquivel[20]
karla.medel05@gmail.com

## Introducción

En algunos sitios de internet[21] es posible consultar el valor numérico de π con una enorme lista de cifras decimales. Observarla con algo de atención puede despertar la curiosidad y encaminarnos a preguntas interesantes.

```
3.1415926535897932384626433
  8327950288419716939937510
  5820974944592307816406286
  2089986280348253421170679
  8214808651328230664709384
  4609550582231725359408128
  4811174502841027019385211
  0555964462294895493038196
  4428810975665933446128475
  6482337867831652712019091
  4564856692346034861045432
  6648213393607260249141273
  7245870066063155881748815
  2092096282925409171536436
  7892590360011330530548820
  4665213841469519415116094
  3305727036575959195309218
  6117381932611793105118548
  0744623799627495673518857
  5272489122793818301194912
  9833673362440656643086021
  394946395224737190 7...
```

Los 10 dígitos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9) aparecen en la expansión decimal de π, pero ¿aparecen con la misma frecuencia? ¿O uno en particular aparece más frecuentemente que los demás? Siendo infinita la expansión decimal de π, ¿existe una manera de saberlo?

En este artículo exploramos estas cuestiones. Tras investigar el tema, dimos con el concepto de número normal. Un número normal, en base 10, es aquel en cuya expansión decimal los 10 dígitos aparecen con la misma frecuencia. Entonces la pregunta inicial (la del título) puede reformularse así: ¿es π un número normal?

Una manera práctica e interesante de buscar la respuesta, aunque no puede tomarse como una prueba definitiva, es contar directamente la aparición de cada dígito en una lista como la mencionada al principio. Esto implica programar una computadora para que realice esta tarea. Nosotros procedimos así, escribimos un programa que calcula la expansión decimal de π y genera tablas y gráficas de la frecuencia con que aparecen los dígitos; el código está disponible libremente en internet (en las siguientes secciones damos más detalles sobre él).

[18] Medio Superior, primer año
[19] Maestría concluida, profesor de la FES-Acatlán, UNAM
[20] Doctorado, cuarto año. CICATA-Legaria, IPN
[21] Por ejemplo en The World of π: http://www.pi314.net/eng/accueildecimales.php

## Números normales

Nuestro sistema de numeración usual tiene como base al 10, de modo que para escribir cualquier número podemos emplear 10 cifras (símbolos) distintas, los dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Existen sistemas de numeración distintos, como el binario (base 2), cuyos dígitos son 0 y 1. Cualquier número puede escribirse en binario como una cadena de ceros y unos. Tal es el sistema que utilizan internamente las computadoras para su funcionamiento, como es bien sabido. Otros sistemas útiles tienen como base al 8, al 16, al 20 o al 60, estos últimos empleados en culturas antiguas.

Un número, cualquiera, puede escribirse en cualquier base y también puede convertirse de una base a otra. Lo anterior nos lleva a precisar algunas definiciones.

**Definición 1**: Un *número normal*, en base 10, es aquel en cuya expansión decimal los 10 dígitos aparecen con la misma frecuencia.

**Definición 2**: Un *número absolutamente normal* es un número que es normal en cualquier base.

Estos conceptos fueron introducidos por Émile Borel en 1909 y estudiados por W. Sierpinsky. En 1992 se dio a conocer un manuscrito incompleto de Alan Turing que contiene resultados muy importantes sobre este tema (Morales, 2013).

Otra manera de expresar el concepto de número normal es considerar que en su expansión decimal toda secuencia de dígitos tiene la misma probabilidad de aparecer. De modo que si estas secuencias se piensan como resultados posibles de un juego de azar entonces un número normal sería como el historial de un juego no truqueado sino completamente legal (Morales-Luna, 2013).

Se sabe que casi todos los números irracionales son normales pero no ha sido posible hasta ahora demostrar que π, Φ, e, √2 o ln(2) son normales, (Navarro, 2011). Naturalmente, tampoco se sabe si son absolutamente normales. Así pues, tan solo se sospecha que π es normal y las pruebas computacionales refuerzan esta idea.

## Exploración computacional del número π

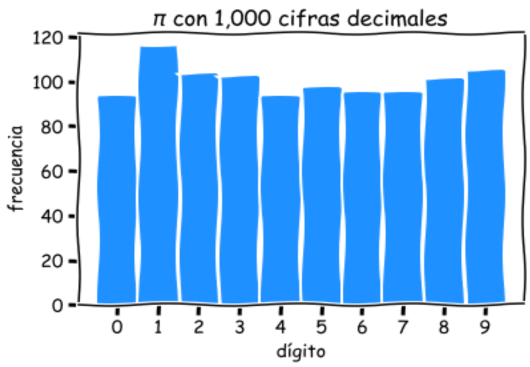
Existen muchos algoritmos para calcular los dígitos de π. Entre todos ellos el preferido por su alta eficiencia es el de los hermanos Chudnovsky[22]. Nosotros usamos este algoritmo para calcular varias cantidades de dígitos de π y elaborar algunas de las tablas y graficas de frecuencias mostradas en la siguiente página[23].

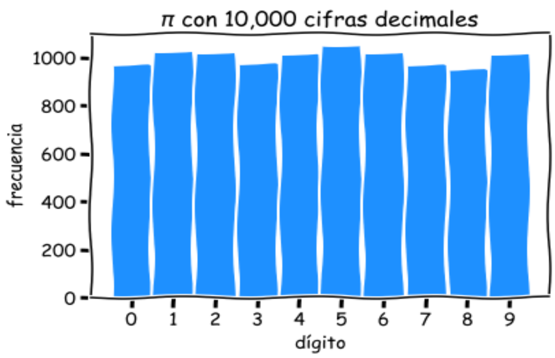
[22] Ver "¿Qué importancia tiene calcular la expansión digital de π?" en este mismo número de la revista de las Jornadas Académicas de Didáctica de las Ciencias 2020 para mayores detalles sobre este tema.
[23] El código que implementamos está alojado en https://github.com/Medetl/Pi

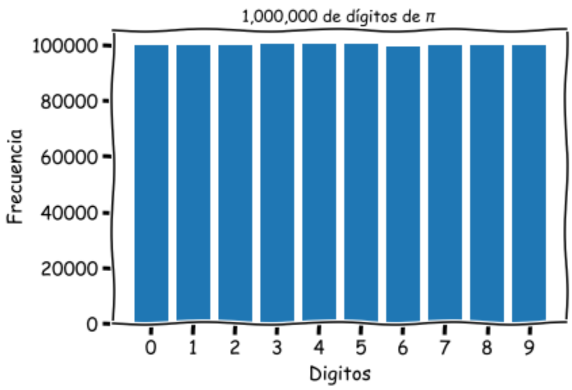
Tabla I: Frecuencia de aparición de los dígitos en π para varias cantidades de decimales.

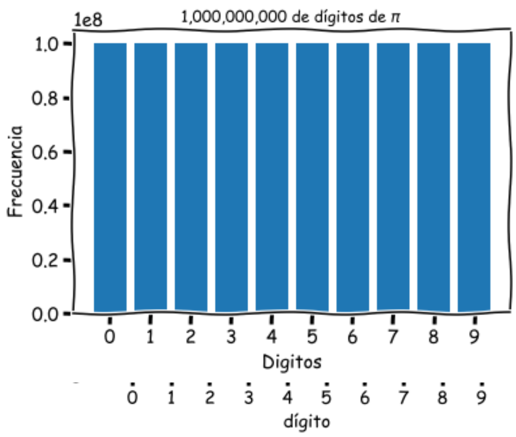
| **Dígitos / Frec.** | **1,000** | **10,000** | **100,000** | **1,000,000** | **1,000,000,000** | **1,000,000,000,000** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 93 | 968 | 10,000 | 99,959 | 99,993,942 | 99,999,485,134 |
| **1** | 116 | 1026 | 10,138 | 99,758 | 99,997,334 | 99,999,945,664 |
| **2** | 103 | 1021 | 9,908 | 100,026 | 100,002,410 | 100,000,480,057 |
| **3** | 102 | 974 | 10,025 | 100,229 | 99,986,911 | 99,999,787,805 |
| **4** | 93 | 1012 | 9,970 | 100,230 | 100,011,958 | 100,000,357,857 |
| **5** | 97 | 1048 | 10,026 | 100,359 | 99,998,885 | 99,999,671,008 |
| **6** | 95 | 1021 | 10,028 | 99,548 | 100,010,387 | 99,999,807,503 |
| **7** | 95 | 969 | 10,025 | 99,800 | 99,996,061 | 99,999,818,723 |
| **8** | 101 | 947 | 9,978 | 99,985 | 100,001,839 | 100,000,791,469 |
| **9** | 105 | 1014 | 9,902 | 100,106 | 100,000,273 | 99,999,854,780 |

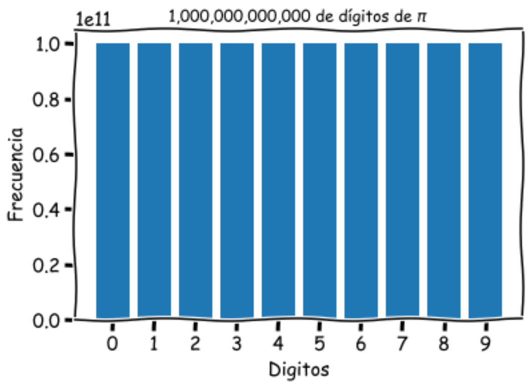
Nota: Elaboración propia hasta 100,000 dígitos; en adelante, Fuente: Posamentier, 2013.




Aunque 1 billón de dígitos puede parecer una cantidad enorme, hay que recordar que la expansión decimal completa de π tiene una infinidad de ellos. Por tanto, aunque las tablas y gráficas anteriores nos muestran que los dígitos aparecen con frecuencias muy similares esto no puede tomarse como una prueba de que π es un número normal; dicha prueba tendría que realizarse, al parecer, mediante argumentos puramente matemáticos.

También es necesario notar que, aunque las tablas anteriores parecen indicar que π es normal en base 10, nada nos dicen acerca de su normalidad en otras bases; sería necesario convertir π a una nueva base para darnos una idea de si en ella es o no normal.

## Conclusión

La cuestión de si los 10 dígitos aparecen con la misma frecuencia en la expansión decimal de π (en base 10) permanece abierta, en este momento nadie conoce la respuesta. Se cree que π es un número normal, es decir, que los dígitos aparecen con la misma frecuencia, pero todavía no se dispone de un argumento contundente. Construir argumentos de esta naturaleza ha mostrado ser tremendamente difícil, al grado de que solo existen para casos muy particulares de números construidos específicamente para esos fines.

Por ejemplo, se ha demostrado que el número:

$$C_{10} = 0.123456789101112131415\ldots,$$

llamado Constante de Champernowne, es normal. Pero el caso de π todavía es un misterio.

**Ilustraciones**: Karla Patricia de la Cruz Medel

## Referencias

Morales-Luna, G. (2013). *Números computables y números normales*. Miscelánea Matemática **56** 27-39.

Navarro, J. (2011). *Los secretos del número **π**: ¿por qué es imposible la cuadratura del círculo?* RBA.

Posamentier, A. S., & Lehmann, I. (2013). *Pi: A Biography of the World's Most Mysterious Number*. Prometheus Books.

# Pitagómero

Sanchez Vega Julio Cesar
juliocesarsanchezvega13@gmail.com

## ¿Cómo determinarías la zona con mayor área?

Se demostrará por medio de un problema de geometría lo interesante del cálculo matemático. El nombre del problema y la propuesta de solución, se deben a Adrián Paenza, basado en una idea planteada por Íñigo Tena Nuñez.

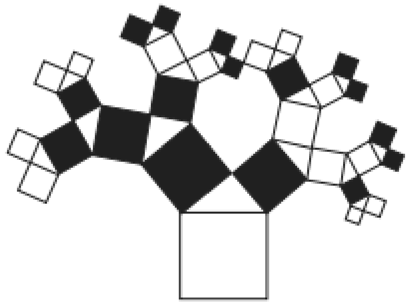


Figura 1. ¿Cuál área es mayor?
Tena, citado en Paenza, 2014

El problema se puede resolver con conocimientos básicos de geometría euclídea, y con buen ojo podemos saber de la figura 1 que área es mayor, si el área ocupada por las figuras en color blanco, o las de color negro. Hay que tomar en cuenta que los triángulos que se incluyen, son rectángulos (figura 2), y que en dichos triángulos se cumple el teorema de Pitágoras.

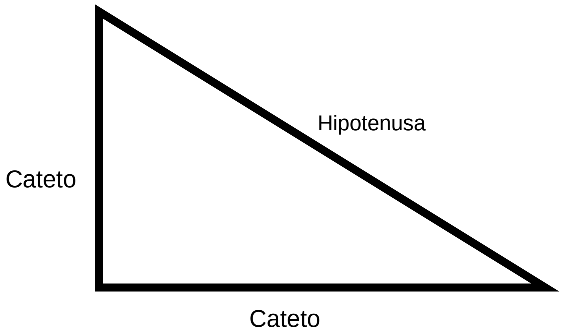



Figura 2. Triángulo rectángulo

## Tenemos una figura geométrica peculiar

Para explicar el teorema de Pitágoras damos a conocer que la hipotenusa es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos. La zona con mayor área la podemos deducir pues el teorema de Pitágoras explica que los catetos determinan dos áreas que sumadas equivalen a la de un cuadrado cuyo lado mide lo mismo que la longitud de la hipotenusa. En resumen, el cuadrado cuyo lado mide la longitud de la hipotenusa, es igual a la suma del área de los cuadrados cuyos lados miden lo mismo que cada uno de los catetos.

En la figura 1, el cuadrado blanco que está en la parte inferior, tiene como longitud de sus lados la hipotenusa del triángulo que está sobre él (figura 3).

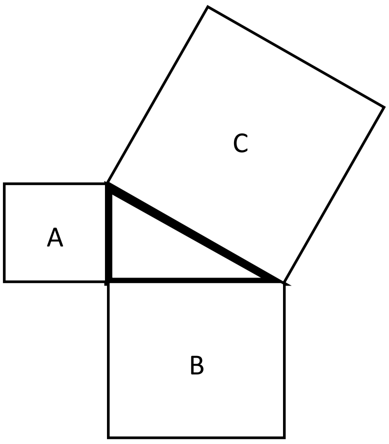



Figura 2. Teorema de Pitágoras

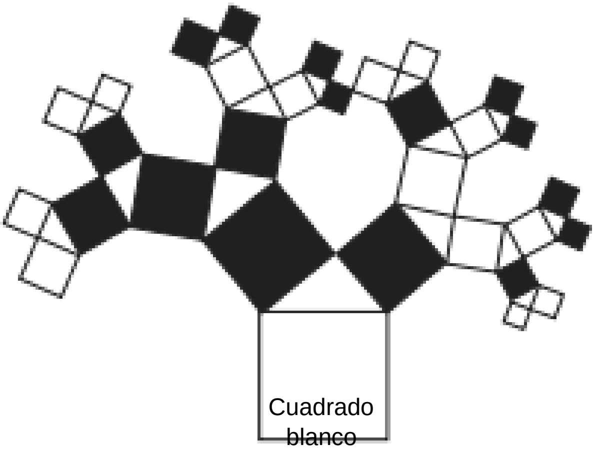



Figura 3. El cuadrado blanco tiene encima un triángulo rectángulo blanco cuya hipotenusa coincide con la longitud del lado del cuadrado.

Por lo tanto, la suma de las áreas de los dos cuadrados negros que coinciden con los catetos del triángulo blanco, es igual al área del cuadrado blanco.

Si continúas analizando la figura de esa manera, buscando los triángulos rectángulos y aplicando el Teorema de Pitágoras, y vas agrupando las áreas blancas por un lado, y las negras que den el mismo valor, por otro, podrás compararlas para saber cuál suma es mayor, si la de las blancas o la de las negras.

**Respuesta a la pregunta**

Sabiendo lo anterior vemos en la figura 4 que en lo seleccionado tienen áreas idénticas, el reto es que localices las figuras equivalentes en área, pero contraria en color; y que el área en color negro, que es la restante, es mayor, pues es la suma de tres áreas a diferencia del área blanca. En resumen, el área negra es mayor que la blanca.

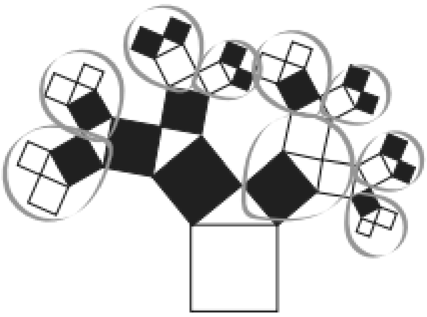


Figura 4. Ubicación de figuras con áreas iguales.

Un caso cotidiano en el que se resuelven problemas similares a este, es en el diseño de un logotipo. Supongamos que eres diseñador y un cliente te pide hacer un logotipo en el cual te bases en el patrón de la figura 1 haciendo hincapié en el contraste de dos colores; supongamos anaranjado y violeta, pero te pide resaltar más el color violeta ¿Cómo determinarías la zona con mayor área? Bueno, la solución ya la tienes.

**Referencias**

Paenza, Adrián. (2014). La puerta equivocada (primera edición). Buenos Aires: Sudamericana. Editorial Guillermo Schavelzon & Asociados.

Barrantes, Manuel; Barrantes, María; Zamora, Victor; Mejía, Álvaro. (2018). El teorema de Pitágoras, un problema abierto. España.

**Nivel superior, primer año.**

# Ecuaciones Diferenciales para el crecimiento biológico

Anaya Pineda José Roberto[24]
Joseroberto.anaya140696@gmail.com

**¿Se puede predecir la estatura promedio máxima que alcanzarán las mujeres y hombres en el país?**

Un problema fundamental tratado en Biología es el crecimiento o decrecimiento, ya sea de una célula, una planta, un órgano, un ser humano o una población. Existe una relación muy buena y que se ha tratado en otros casos, tal es la ley de Maltus. Ha tenido mucho éxito esta razón de cambio (o ecuación diferencial) en tales problemas, como el modelado en la predicción de tiempo de vida, el crecimiento de poblaciones de microorganismos y plantas.

Es muy interesante como en la física se pueden modelar procesos de la naturaleza mediante estas razones de cambio, casi perfectamente. Es como si la naturaleza estuviera definida por tales expresiones matemáticas.

Así el economista inglés Thomas Maltus en el siglo XVIII desarrollo, en su ensayo sobre las poblaciones, la teoría demográfica basada en una ecuación diferencial que proponía como el modelo del crecimiento de la población y que se conoce como la ley de Maltus. Con base en datos demográficos de los Estados Unidos de América del siglo XVII, sostuvo que la población se duplicaba cada 25 años. Por otra parte, Malthus supuso que los medios de subsistencia aumentan más lentamente, por lo que llevarían a un serio problema de sostenibilidad a corto plazo.

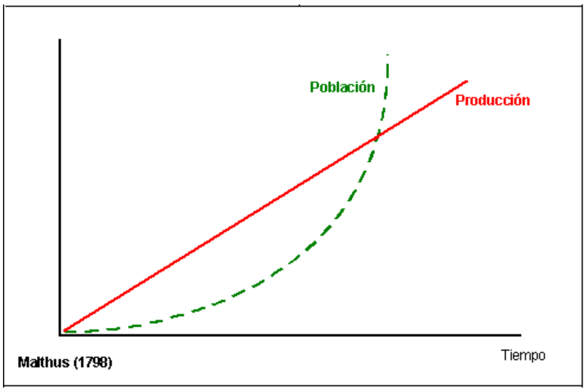



Figura 1. Thomas Robert Maltus (1766-1834) y una gráfica representativa de su teoría de crisis poblacional[25]

La inquietud principal es analizar si tal herramienta matemática, con fines un tanto distintos, se puede llevar con cierto cuidado al análisis del crecimiento de

[24] Egresado de la Escuela Superior de Física y Matemáticas
[25] Biografía de Maltus y trabajo principal, ley de Maltus (1798) en: las ciencias fundamentales http://lascienciasfundamentales.blogspot.com/2016/10/ley-de-malthon.html

los seres humanos. Algo tan importante como la predicción de un rasgo únicamente biológico, analizado con una teoría demográfica.

**Ley de Malthus (catástrofe de población)**

La predicción principal de la obra “Ensayo sobre el principio de población” se conoce como ley de Malthus. El trabajo de Malthus pretendía interpretar la desigualdad económica, la miseria y la pobreza de las masas trabajadoras bajo el capitalismo, como una consecuencia práctica del crecimiento de la población y la escasez de recursos.

La Ley de Malthus predecía, por tanto, la ocurrencia en el futuro de un fenómeno llamado catástrofe malthusiana, en la que los recursos alimentarios serían claramente insostenibles para mantener a la población mundial y sobrevendrían graves guerras y hambrunas que diezmarían a la humanidad. Al formalizar las ideas de Maltus se obtienen formas matemáticas que nos llevan a poder describir en el tiempo ciertos procesos, pues obtenemos una expresión que nos da información del estado en que se encuentra el objeto que estamos estudiando en un cierto tiempo. Por ejemplo, un helado derritiéndose en un día caluroso.

Figura E1 Observamos lo que le sucede a un helado a lo largo de un día caluroso a diferentes horas.

Otro ejemplo aún más claro de estos procesos que podemos describir mediante matemáticas, es cómo va evolucionando el proceso de oxidación de una manzana recién partida a la mitad. Se puede ver fácilmente como cambia a medida que pasa el tiempo.

Figura E2 Fotografías de una manzana tomadas en tres tiempos consecutivos donde se ve claramente cómo se va oxidando la manzana partida. Otro proceso más que podemos describir a lo largo del tiempo.

**¿En verdad se pueden predecir matemáticamente aspectos biológicos?**

Conocer el desarrollo de las ecuaciones diferenciales en aplicaciones a la biología, y las características que tienen estos modelos teóricos, se ha vuelto muy importante hoy en día en el desarrollo de la medicina, el área farmacéutica, e inclusive en ciencias sociales como lo vemos en el trabajo de Thomas

Malthus[26]. Por tal motivo nos aventuramos a definir ciertas características de un modelo de crecimiento o decrecimiento para predecir la estatura promedio de las mujeres con base en datos verdaderos de la Organización Mundial de la Salud y del Instituto Mexicano del Seguro Social. Se ha elegido analizar el sexo femenino.

Una discusión que se abre de manera excelente derivada de este tema es la cantidad de hombres y mujeres que hay en el mundo, así podríamos pensar en un sinfín de razones por las que cada sexo puede crecer a diferentes ritmos y nuestro modelo fracasar. Para esta discusión es muy relevante una nota publicada en La Vanguardia[27] recientemente.

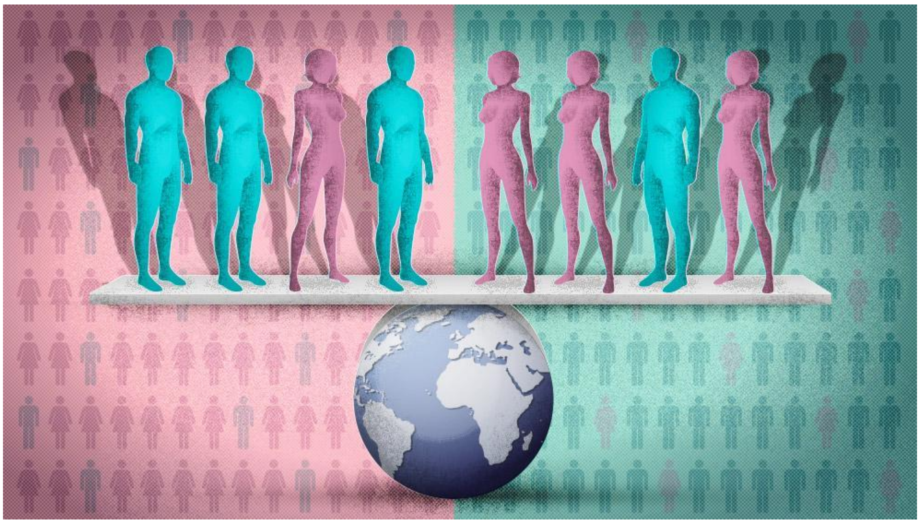


Figura 2. Imagen representativa sobre la distribución de la población por género, con el fin de explorar rasgos sociales y demográficos que se salen del alcance de modelos matemáticos.

## ¿Cómo se puede adaptar una ecuación a un fin específico?

Al momento de realizar un modelo matemático que describe condiciones de algún fenómeno o hecho físico, se encuentran en el camino serios conflictos a resolver, por ejemplo, considerar condiciones reales, en este caso tenemos que el ser humano se desarrolla en altura hasta llegar a un máximo durante su juventud. Entonces es importante agregarle al modelo "las características" que lo hagan que describa tales cosas.

Y podemos comenzar a vislumbrar el camino correcto que estamos llevando, pues en un tiempo cero, cuando el bebe o la niña recién nacen, no se encuentran con estatura cero, tienen una determinada estatura de la que se puede tomar un promedio, por país y a nivel mundial.

[26] Robert Malthus: El primer economista de Cambridge, (The First of The Cambridge Economists 1933, publicado en Essays in Biography, 1933)
[27] El mapa que muestra los países con más hombres que mujeres (y viceversa), Laura Aragó, Barcelona. Diciembre 2018, en: https://www.lavanguardia.com/internacional/20181216/453512578014/mapa-paises-mas-hombres-que-mujeres-viceversa.html

Figura 3. Imagen representativa del crecimiento de los seres humanos.

En este caso nuestro objetivo es llegar al: "**Modelo de Crecimiento Biológico":**

## ¿Qué puedo hacer para saber si un modelo matemático funciona?

La respuesta es muy divertida, simplemente: “probar el modelo”, es el método para corroborar la veracidad del mismo, y si no funcionó o si se puede mejorar, nos daría nociones de cómo abordarlo.

Entonces lo que se suele hacer es meter información al modelo para que funcione como una maquinita que entrega soluciones y ver si las soluciones corresponden con lo que uno desea o se apegan a la realidad. Probar el modelo es como uno se da cuenta de qué mejora puede existir. Es conveniente recordar que no hay modelo único, puede haber muchos modelos para una misma situación física o real. Probemos nuestro modelo entonces.

Recordemos que nuestra intención es predecir la estatura máxima promedio de las niñas en el país, por lo que con la expresión obtenida podemos tener controlada la cantidad de información que el modelo necesita para obtener resultados. Esta información es: el valor de condición inicial (estatura de los recién nacidos) y dos valores que podemos tomar de manera arbitraria de los datos experimentales o en este caso de los datos estadísticos de la OMS y del IMSS que se encuentran en tablas de acceso público.

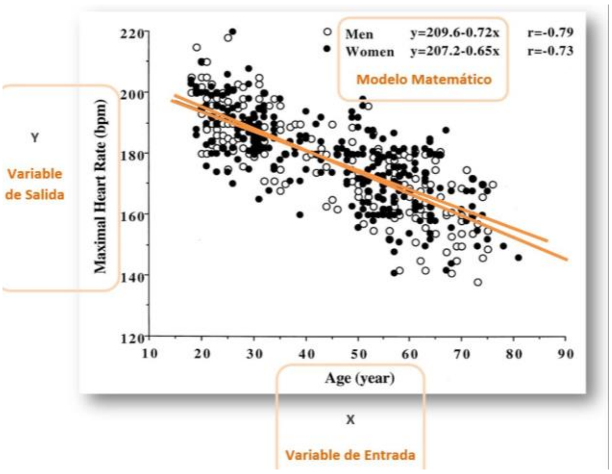



Figura 4. Gráfica que sirve como ejemplo de la prueba de un modelo matemático, en este caso aplicado para indagar la frecuencia cardiaca de hombres y mujeres de varias edades[28].

## Datos estadísticos de las estaturas promedio de las mujeres, recabados por la OMS y el IMSS

Al corroborar el modelo no realizamos experimentos, nuestro fenómeno físico está registrado en tablas de organizaciones oficiales de salud, las cuales tienen muy bien definidos los rangos de estatura para la población femenina en el país y en el mundo, de acuerdo a su rango de edades:

Tabla I. Datos registrados por el IMSS de niñas recién nacidas a 1 año de edad[29]

| EDAD | Niñas | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | PESO (Kg) | | | | ESTATURA | |
| | RIESGO DE DESNUTRICIÓN | NORMAL | SOBREPESO | OBESIDAD | RIESGO DE ESTATURA BAJA | NORMAL |
| Al nacer | <2.8 | 3.2 | >3.7 | >4.2 | <47.3 | 49.1 |
| 1 mes | <3.6 | 4.2 | >4.8 | >5.5 | <51.7 | 53.7 |
| 2 meses | <4.5 | 5.1 | >5.8 | >6.6 | <55.0 | 57.1 |
| 3 meses | <5.2 | 5.8 | >6.6 | >7.5 | <57.7 | 59.8 |
| 4 meses | <5.7 | 6.4 | >7.3 | >8.2 | <59.9 | 62.1 |
| 5 meses | <6.1 | 6.9 | >7.8 | >8.8 | <61.8 | 64.0 |
| 6 meses | <6.5 | 7.3 | >8.2 | >9.3 | <63.5 | 65.7 |
| 7 meses | <6.8 | 7.6 | >8.6 | >9.8 | <65.0 | 67.3 |
| 8 meses | <7.0 | 7.9 | >9.0 | >10.2 | <66.4 | 68.7 |
| 9 meses | <7.3 | 8.2 | >9.3 | >10.5 | <67.7 | 70.1 |
| 10 meses | <7.5 | 8.5 | >9.6 | >10.9 | <69.0 | 71.5 |
| 11 meses | <7.7 | 8.7 | >9.9 | >11.2 | <70.3 | 72.8 |

[28] Conceptos claros, Jordi Olle, Barcelona, en: https://conceptosclaros.com/que-es-modelo-matematico/
[29]http://www.imss.gob.mx/sites/all/statics/salud/tablas_imc/ninos_1a11meses_imc.pdf, http://www.imss.gob.mx/sites/all/statics/salud/tablas_imc/ninos_1a4anios_imc.pdf, http://www.imss.gob.mx/sites/all/statics/salud/tablas_imc/ninos_5a9anios_imc.pdf

Con los datos de la Tabla I obtenemos la estatura de los recién nacidos o sea el valor de la condición inicial que se requiere el modelo para funcionar.

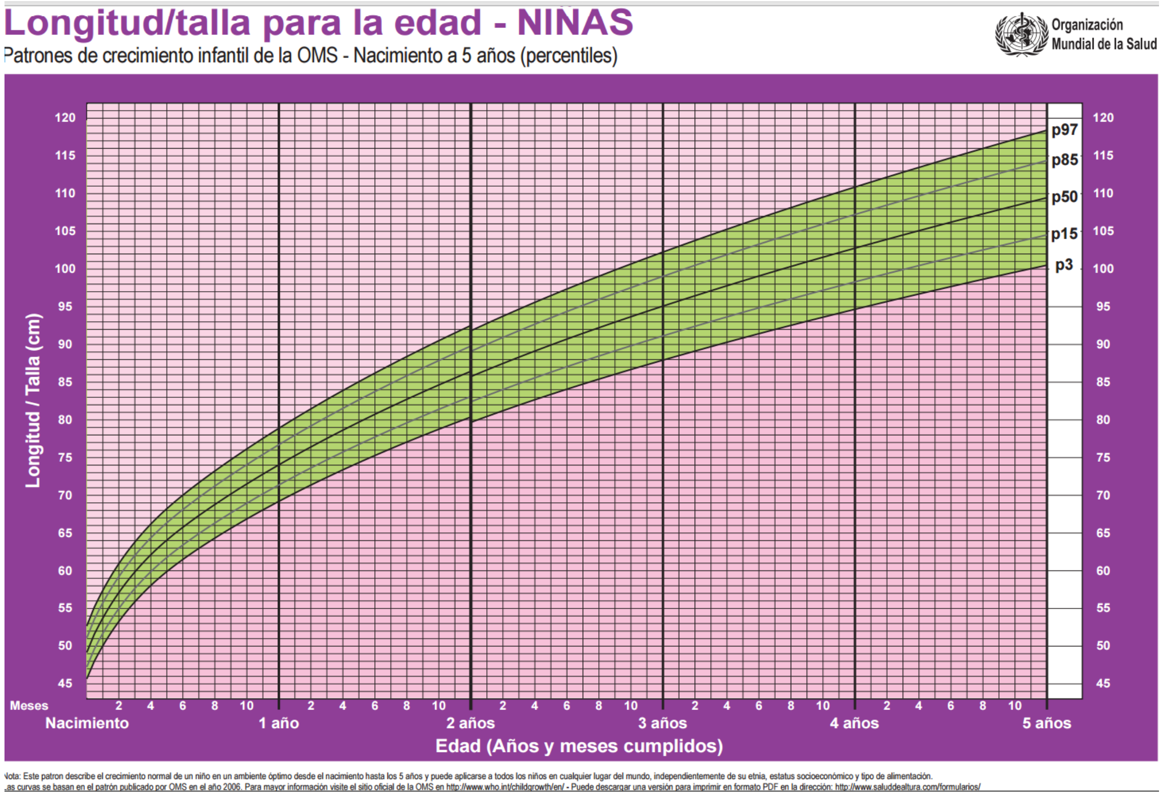



Figura 5. Gráfica con los datos recabados por la OMS de las estaturas de las niñas a nivel mundial en promedio

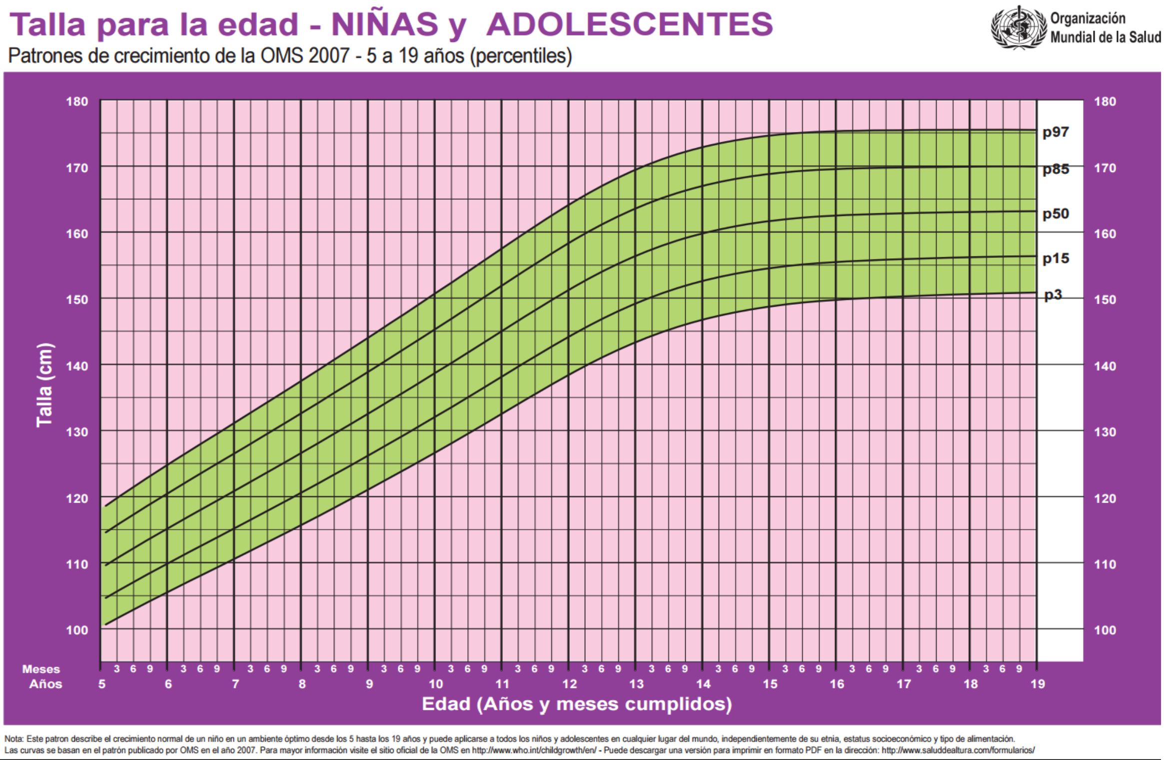



Figura 6. Gráfica de datos recabados por la OMS de las estaturas de las mujeres jóvenes a nivel mundial en promedio

Las Figuras 5 y 6 han sido obtenidas a través de la página oficial de la OMS[30] y con tales datos podemos tomar de manera arbitraria (a conveniencia de nuestro modelo) valores para que nuestro modelo funcione. En la Figura 5 notamos los valores para niñas recién nacidas hasta un año de edad y podemos comparar con los valores en la Tabla I del IMSS. En la Figura 7 tenemos los datos estadísticos relevantes de los casos límites, cuando las mujeres ya no crecerán más (esto lo tomamos de acuerdo a la Figura 6 en 19 años de edad), o sea la estatura máxima buscada, y por lo tanto podemos analizar el funcionamiento de nuestro modelo.

### Respuesta a la pregunta

Regresando a la pregunta originalmente planteada podemos responder afirmativamente a dicha cuestión, pues nos encontramos frente al análisis de un modelo matemático con el que de manera cuidadosa podemos predecir la estatura máxima que alcanzaran las mujeres en el país y en el mundo en general. Basándonos en los tres datos que requiere el modelo para funcionar que obtenemos de las Tablas, y realizando los cálculos que el modelo propone podemos corroborar su funcionamiento, pues arroja valores que son muy cercanos a los que se encuentran en las tablas de las organizaciones de salud. Así con las siguientes tablas corroboramos su funcionamiento:

Datos de la OMS e IMSS sobre la estatura promedio femenina al nacer, Yo=49.1 cm.
Al ver el acervo de datos que tenemos con las gráficas de la OMS, para cubrir la mayor parte de los datos de las gráficas tomamos los valores:
$Y_o$= 49.1 …. Recién nacido
$Y_1$= 115 …. A los 6 años
$Y_2$=153 …. A los 12 años

Tabla II. Primer resultado al aplicar el modelo descrito en la ecuación (5) con valores reales.

| Comparación de los valores de las estaturas obtenidas | |
|---|---|
| Valor del modelo Teórico | Valor real de tablas |
| 165.41 cm | 163 cm |
| | |

Tabla III. Resultados obtenidos al ingresar diferentes valores de referencia Y1 y Y2 en el modelo matemático con Yo=49.1

| Valores obtenidos tomando otras Y1 y Y2 [cm] | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Yo= 49.1 | Ymáx =159.8 | Yo= 49.1 | Ymáx =166.2 | Yo= 49.1 | Ymáx= 159.6 | Error en 1 = 1.97% |
| Y1=108 5años | | Y1=121 7años | | Y1=127 8años | | Error en 2 = 1.97% |
| Y2=145 11años | | Y2=155 13años | | Y2=157 14años | | Error en 3 = 2.08% |

[30]h ttp://www.saluddealtura.com/fileadmin/PDF/CURVASOMS/Estatura_Ninas_0_a_5_anos.pdf

## Anexo: Desarrollo Matemático

Al formalizar las ideas de Maltus en forma de ecuaciones diferenciales y calculando la solución en base de ciertos parámetros y condiciones iniciales, podemos obtener un buen modelo exponencial como lo dicta la teoría, pues las soluciones de la ecuación diferencia son exponenciales.

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y \qquad \cdots (1)$$

Con solución:

$$y = Ce^{\alpha t} \qquad \cdots (2)$$

Donde $C$ es un número real y el parámetro $\alpha$ puede ser negativo o positivo para decrementos e incrementos, respectivamente, de los valores de $y$ en el tiempo. En nuestro caso $y$ va tomando los valores de las longitudes lineales de las estaturas. Claramente las soluciones de la ecuación en la ley de Maltus, son exponenciales y tendrán una curva en el tiempo como la mostrada en la Figura 1. Con la formulación en (1) y (2) encontramos serios problemas de entrada, podemos ver qué (2) se va a infinito cuando el tiempo se va a infinito, lo que no es correcto, pues el ser humano se desarrolla en altura hasta llegar a una cota durante su juventud. Estas formulaciones se completan con las maravillosas condiciones de frontera o condiciones iniciales que van adaptando la formulación al problema físico real. Así tendremos:

$$\frac{dy}{dt} = F(y) \qquad y = Yo \qquad para \quad t = 0 \qquad \cdots (3)$$

Y donde $F$ en (3) es una función apropiada para este caso, pero aún desconocida. Como una función lineal no es apropiada, por el mismo hecho de que un ser humano no crece de manera proporcionalmente, a lo largo de su vida (figura 3), probamos una aproximación de orden superior y tenemos lo siguiente:

$$\frac{dy}{dt} = F(y) = \alpha y - \beta y^2,$$
$$con\ \beta > 0\ para\ restringir\ el\ crecimiento\ de\ y \qquad \cdots (4)$$

Por lo tanto (3) se transforma en la siguiente expresión, que ya es nuestro **Modelo de Crecimiento Biológico":**

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y - \beta y^2 \qquad y = Yo \qquad para \quad t = 0 \qquad \cdots (5)$$

Después de resolver la ecuación diferencial de nuestro modelo planteado en (5) con esas condiciones de inicio. Podemos llegar a la solución general que es la siguiente:

$$Ymáx = \lim_{t \to \alpha} y = \frac{y1((Yo * y1) - 2(Yo * y2) + (y1 * y2))}{y1^2 - (Yo * y2)} \qquad \cdots (6)$$

Para llegar a la ecuación (6) se tomaron algunos casos límites y algunas aproximaciones óptimas para ajustar la respuesta del modelo al caso físico real, también es importante mencionar el cociente de los coeficientes en (5), pues los podemos poner en términos de simplemente tres factores que podemos conocer muy bien con datos estadísticos, la expresión (7) se ha usado para obtener (6):

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{y1^2 - Yoy2}{y1(Yoy1 - 2Yoy2 + y1y2)} \qquad \cdots (7)$$

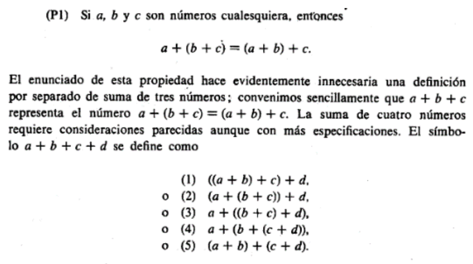
Recordemos que nuestra intención es predecir la estatura máxima promedio de las niñas en el país. Con la expresión (6) la podemos conseguir simplemente en términos de $Yo, y1\ y\ y2$, por esa razón es importante el cociente mostrado en (7). Basta tomar el parámetro de condición inicial $Yo$ y dos parámetros óptimos de las curvas de crecimiento de los niños $y1\ y\ y2$.

# La labor matemática: de calculistas a filósofos

Marco Antonio García López[31], Luz María de Gpe. González Álvarez[32]
marcoa.garlop@gmail.com

## ¿Cuál es la labor natural de un matemático?

Cuando alguien escucha decir a otra persona que es un matemático la primera impresión probablemente sea que esa persona es muy buena manejando números, tal vez como un súper contador. Sin embargo, cuando se abre un libro de matemática universitaria es posible que no se encuentre ningún número salvo para señalar las páginas. ¿Qué hace, entonces, un matemático? ¿Podríamos contratar a un recién egresado de matemáticas con la seguridad de que llevaría mejor nuestras finanzas que un contador o un actuario? ¿O es alguna especie de brujo moderno hablando en un lenguaje ajeno al no iniciado y que no hace referencia a nada en concreto? Un recorrido por la historia de la matemática puede aclarar esta cuestión, a la vez que muestra dónde se origina esta diferencia entre creencia y realidad.


(P1) Si $a$, $b$ y $c$ son números cualesquiera, entonces

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

El enunciado de esta propiedad hace evidentemente innecesaria una definición por separado de suma de tres números; convenimos sencillamente que $a + b + c$ representa el número $a + (b + c) = (a + b) + c$. La suma de cuatro números requiere consideraciones parecidas aunque con más especificaciones. El símbolo $a + b + c + d$ se define como

(1) $((a + b) + c) + d$,
o (2) $(a + (b + c)) + d$,
o (3) $a + ((b + c) + d)$,
o (4) $a + (b + (c + d))$,
o (5) $(a + b) + (c + d)$.

**Figura 1 Detalle de la página 4 del libro "Calculus" de M. Spivak, un libro de texto básico en la licenciatura en matemáticas.**

## Las primeras nociones matemáticas

Desde sus inicios, e incluso antes, el ser humano tuvo la necesidad de identificar cantidades de objetos. Las necesidades de la vida social y económica, junto con la religión y la magia, acrecentaron el interés que tuvo la humanidad por los números durante la época neolítica (Collette, 1986).

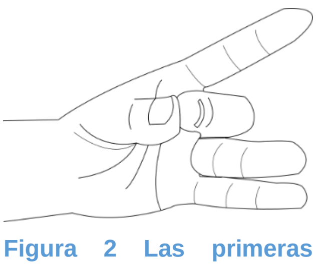


**Figura 2 Las primeras bases de numeración estuvieron fuertemente influenciadas por las partes del cuerpo humano: se contaba con el cuerpo.**

Los primeros intentos de conteo fueron fuertemente influenciados por la estructura corporal, lo cual puede verse en las bases utilizadas para ello: cinco (los dedos de una mano), diez (los dedos de ambas manos) y veinte (los dedos de ambas manos y de ambos pies). En este periodo cuando alguien decía “cinco” no se refería al concepto abstracto que manejamos hoy en día, sino simplemente quería decir “tantos como dedos en la mano” (Aleksandrov, 2014). Así pues, las experiencias sensomotoras y los conceptos matemáticos abstractos se incorporan mutuamente, al menos en un inicio. Lo cual hace de los números algo esencialmente humano (Vallverdú, 2016).

[31] Sociedad Científica Juvenil - Oaxaca
[32] Escuela Superior de Física y Matemáticas

Conforme la complejidad de la vida colectiva iba creciendo, los problemas a resolver demandaban también una mayor complejidad en las soluciones: era necesario, por ejemplo, aprender a contar colecciones cada vez más grandes de objetos y comenzar a realizar algunas operaciones con ellos. Aun así, en esta primera etapa de la labor matemática, los conocimientos matemáticos fueron adquiridos de manera empírica: los resultados se deducían directamente de la práctica.

## Siglos de matemáticas formales

La geometría y la aritmética encontraron en la Grecia antigua un terreno fértil para desarrollarse y alcanzar un nuevo nivel de abstracción. Esto sucedió en el momento en que se comenzó a derivar algunas propiedades de números y figuras ya no de la experiencia empírica, sino de otras propiedades establecidas anteriormente usando sólo reglas de inferencia lógica (Smogorzhekski, 1978).

Dentro de las grandes figuras griegas, Pitágoras y su séquito merecen especial atención debido a las implicaciones que tuvieron sus estudios. Descubrieron diversas propiedades de los números y diversos tipos de éstos —los amistosos, perfectos, abundantes y deficientes, sólo por nombrar algunos—, unieron de manera irreversible a las matemáticas y a la música —construyeron escalas musicales expresadas como razones de números enteros—, probablemente encontraron muchas de las propiedades de las proporciones, descubrieron las magnitudes inconmensurables, se le atribuye al maestro la construcción de los *sólidos regulares* —tetraedro, el hexaedro o cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro—, entre otras muchas avances en matemáticas (Collette, 1986).

**Figura 3 Los cinco poliedros regulares, también conocidos como sólidos platónicos.**

La fijación de los pitagóricos por los números no fue, sin embargo, una meta en sí misma. Creían que al estudiar los objetos matemáticos estaban ingresando a un mundo superior, a la *realidad real*, del cual nuestro mundo tangible era mera sombra o proyección. Llegaron a alcanzar un grado de obsesión fanática que les impidió aceptar mejores formas para explicar la naturaleza y la belleza, sometiendo a estas dos ramas a los ideales de belleza y simetría matemáticos durante muchos siglos (Alsina, 2011).

Las necesidades de cálculo y contabilidad que cada civilización tenía exigieron de los matemáticos herramientas cada vez mejores para poder seguir operando. Muchas de las formulaciones de geometría se derivaron de la necesidad de medir y dividir superficies y áreas de construcción, así como del cálculo de las trayectorias de los cuerpos celestes. Pero esta necesidad era recíproca, los avances que se hacían en matemáticas requerían de un fundamento *tangible* sobre el cual apoyarse. Así, por ejemplo, hasta principios del siglo XIX muchos matemáticos trataron de reorganizar los cálculos algebraicos para evitar la aparición de los números negativos.

Y es que, aunque no parece haber problema en el hecho de entender que si logramos una ganancia de quince unidades pero tenemos un déficit de veinte nos queda una deuda de cinco unidades, la dificultad conceptual de estos números radicaba en operar algebraicamente con ellos. Por ejemplo, todavía en la época de Leibniz de debatía la interpretación de expresiones como

$$\frac{1}{-1} = \frac{-1}{1}$$

donde se tiene que $1$ es a $-1$ como $-1$ es a $1$, pero siendo que $1$ es mayor a $-1$ (Rojas González, 2018).

Los matemáticos de estos periodos no eran plenamente conscientes de que la *regla de los signos*, de donde deriva esta propiedad, no se puede demostrar. No comprendían que es, junto con otras definiciones que rigen a los enteros negativos, *creada* por nosotros para poder operar con libertad y preservar leyes fundamentales de la aritmética.

**El surgimiento de la ciencia moderna**

Hasta antes del Renacimiento los fenómenos físicos eran explicados con las bases que sentara Aristóteles durante la antigüedad: se tenía una física descriptiva —describía, por ejemplo, la tendencia de los cuerpos en movimiento a retardarse hasta alcanzar el reposo. Sin embargo, a partir de los trabajos de Galileo Galilei se vivió un cambio en la forma de hacer ciencia; la física se volvió abstractiva y, sobre todo, matemática, es decir, a partir de una gran cantidad de eventos se enfocan en ciertas cualidades (abstracción) que permitan plantear una ley general que tenga una forma matemática (Strobl, 1970).

**Figura 4 Galileo Galilei, padre la ciencia moderna**

Las presiones por nuevas herramientas matemáticas potencian el desarrollo de esta área del saber, sin embargo, la misma naturaleza de la nueva ciencia, que como ya se dijo es abstractiva, condiciona los objetos matemáticos a encontrar su fundamentación en un área externa. Es así, que el mismo Galileo basó sus trabajos en los resultados que habían alcanzado antes un grupo de eruditos del Merton College, conocidos como los *calculadores de Oxford*. Estos *calculadores* mediante la recolección y análisis de datos empíricos \cite{FreixenetMovi} llegaron a formulaciones tan importantes como el hecho de que

> *[...] un cuerpo en movimiento rectilíneo uniformemente acelerado recorre, en un determinado intervalo de tiempo, el mismo espacio que sería recorrido por un cuerpo que se desplazara con velocidad constante e igual a la velocidad media del primero* (Tarrés Freixenet, 2017).

E incluso herramientas tan avanzadas como el cálculo infinitesimal encontraron su justificación en la abstracción de problemas físicos, al menos en la formulación de Newton.

Los matemáticos, entonces, se volvían expertos en encontrar nuevas herramientas que hicieran posibles cálculos cada vez más precisos. Permitiendo, además, la incorporación de nuevos conceptos que a pesar no estar seguros de qué eran, permitían la operar con mayor facilidad para obtener los cálculos requeridos[33]. Pero la labor matemática seguía siendo la misma: calcular.

## Las nuevas geometrías y el método axiomático

Todo cambiaría a partir de los trabajos de Lobachevski. Este matemático ruso trataba de demostrar el quinto postulado de Euclides, según el cual, al estar en un plano que contiene una recta y un punto fuera de ella, sólo se puede trazar una única recta paralela a la recta dada. Para hacer la demostración supuso ciertos los otros axiomas de los “Elementos” e hizo la suposición que, a la vez, era posible trazar por lo menos dos rectas paralelas a una recta dada por un punto fuera de esta recta (Smogorzhekski, 1978), es decir, lo contrario a lo que quería demostrar. Con esto Lobachevski esperaba llegar a una contradicción, mas ésta nunca apareció y, de hecho, él mismo demostró que dicha contradicción no existía.

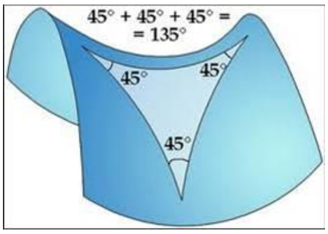



**Figura 5 En la geometría de Lobachevski suceden cosas que en la geometría euclidiana no. Por ejemplo, en esta geometría los ángulos internos de un triángulo suman 135°.**

Este hecho planteó en la física la cuestión de si el espacio físico era euclidiano, como hasta entonces se había considerado, o no. Problema que no es menor y que a la fecha no se puede considerar resuelto por completo. Pero en cuanto a las matemáticas, los problemas que surgieron de este hecho no fueron menores. Dentro de éstos hubo algunos que provocaron que el *oficio* del matemático derivará en otro totalmente diferente al que hasta entonces venía siendo.

Y es que al surgir la geometría de Lobachevski y las demás que le siguieron, aparecieron algunas cuestiones que no podían ser calculadas, al menos no con métodos tradicionales. Lo cual provocó que los matemáticos comenzaran a preguntarse si sería correcto trabajar con los nuevos postulados o no. Y como ya estaba demostrado que no había contradicción alguna en las suposiciones de Lobachevski, la necesidad de fundamentar los principios sobre los que se sostenía alcanzó hasta las matemáticas que llevaban milenios desarrollándose.

Los problemas con los que la matemática se encontró en este momento ya no eran problemas que se resolvieran haciendo operaciones, sino que se busca ahora que la matemática supere ciertos filtros que se le ponen para darla por buena. Estos filtros se sistematizaron en lo que se conoce como método axiomático.

A David Hilbert se le atribuye haber iniciado este método en las matemáticas modernas. El método axiomático, a pesar del nombre, se diferencía enormemente con el método euclidiano, y la principal diferencia es que, mientras que con el método euclidiano se consideraba a los axiomas como proposiciones verdaderas, evidentes y que no requerían demostración, con lo iniciado por Hilbert no serán tales más que en combinación con los demás axiomas, es decir, se les pide ahora que a partir de los axiomas no sea posible llegar a una contradicción y, además, que ninguno de ellos pueda derivarse de los demás. En matemáticas, cuando un axioma cumple con los requisitos antes

[33] Tal es el caso de los números complejos, cuya unidad se sigue denotando con una letra $i$ que proviene de considerarlos números imaginarios.

mencionados, se dice que es *independiente* y *consistente* con los demás (Hilbert, 2010). Y, a partir de Hilbert, esta es una de las preguntas con las que constantemente se enfrenta un matemático, especialmente cuando trata de desarrollar teoría para una nueva área de estudio: ¿serán estos resultados consistentes con lo hasta ahora desarrollado?[34].

## El matemático como filósofo

Así, pues, a partir de la segunda mitad del siglo XIX el matemático se vuelve alguien que debe demostrar la validez de ciertos argumentos, que en este caso son argumentos *sobre* las matemáticas. Es decir, el matemático comienza a reflexionar sobre su propio oficio, comienza a hacer una teoría acerca de las matemáticas: comienza a hacer filosofía.

Por esto mismo, cuando hoy en día se abre un libro de matemáticas no debería haber sorpresa en no encontrar las hojas llenas de tablas de números, ya que lo que ahí se expresa son deducciones de verdades a partir de otras verdades anteriormente establecidas, son mecanismos de reflexión acerca de la propia matemática expresados, eso sí, en un lenguaje diferente conocido como sistema axiomático. Pero al final del día es una reflexión. Y esto es lo que hoy día se considera el trabajo de un matemático.

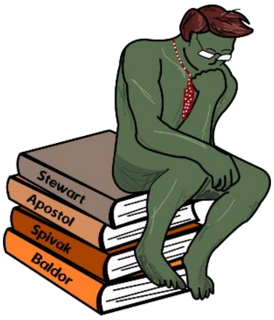



**Figura 6 La labor de un matemático se ha vuelto un proceso de reflexión sobre la matemática misma.**

Esto, por supuesto, no implica que los matemáticos hayan dejado de hacer cuentas o cálculos, en la práctica hay muchos que se especializan en esas áreas. Lo que se quiere dar a entender al decir que el trabajo de un matemático contemporáneo es la reflexión, es que el avance mismo de la matemática ha impuesto como necesidad que el matemático, y todo aquel que pretenda serlo, tenga la capacidad de utilizar el sistema axiomático para llevar a cabo reflexiones, más comúnmente llamadas demostraciones, acerca de la matemática misma.

## Referencias

Aleksandrov, A. D. (2014). Visión general de las matemáticas. En A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, & M. A. Laurentiev, *La matemática: su contenido, métodos y significado.* Alianza Editorial.

Alsina, C. (2011). *La secta de los números: El teorema de Pitágoras.* RBA.

Collette, J. P. (1986). *Historia de las matemáticas.* Siglo XXI.

Hilbert, D. (2010). *Fundamentos de las matemáticas.* UNAM, Facultad de Ciencias.

[34] De hecho, Hilbert lideró un programa que es conocido como *formalismo* que intentaba derivar todas las áreas de las matemáticas de un sólo conjunto de axiomas, fue hasta la llegada de Kurt Gödel que se mostró que esto no era posible.

Rojas González, R. (2018). *El lenguaje de las matemáticas.* Fondo de Cultura Económica.

Smogorzhekski, A. S. (1978). *Acerca de la geometría de Lobachevski.* Editorial MIR.

Spivak, M. (1992). *Calculus.* Editorial Reverté.

Strobl, W. (1970). Orígenes filosóficos de la ciencia moderna. *Anuario Filosófico*, 327-347.

Tarrés Freixenet, J. (2017). Matemáticas y movimiento en el siglo XIV. *Pensamiento matemático*, 87-100.

Vallverdú, J. (2016). *Bayesians versus frequentists: A philosophical debate on statistical reasoning.* Springer.

# Plasma

Manuel Sánchez Glez[35], Ma. de Guadalupe Sánchez Glez.[36]
madeguadalupe47@gmail.com

## ¿Qué es el plasma?

Existen cuatro estados de la materia; los mas conocidos son: el sólido en el cual sus átomos se encuentran firmemente unidos; el líquido donde la unión entre los átomos se hace más débil y no tiene forma definida como el sólido, sino que toma la forma del recipiente que lo contiene; el estado gaseoso, ya no tiene ni forma ni volumen propios, pues los átomos se liberaron de sus ligas mutuas, debido a que estos tienen una energía mucho mayor que en estado líquido. Por último, el menos conocido es el plasma, del cual vamos a hablar.

Fig. 1. Un plasma es un gas electrificado (foto de autoría propia)

## El plasma es mas común de lo que crees


Fig. 2. Por tener electrones libres, el plasma conduce fácilmente la corriente (foto de autoría propia)

Los estudios del plasma comenzaron formalmente en la primera década del siglo 20, sin embargo, la física del plasma se ha difundido muy poco, a pesar de que más del 99% de la materia del Universo se encuentra en este estado. De entre todos los estados de la materia es el que tiene mayor energía.

Hay dos tipos de plasma que se diferencian de acuerdo a su temperatura: El plasma caliente como el fuego (aunque algunos opinan que el fuego no es plasma), las auroras boreales, o los rayos. Estos se encuentran en forma natural, pero también hay producidos por el hombre como las lámparas de neón o las pantallas de plasma. En el Universo tenemos a las nebulosas, el sol y las estrellas.

El otro tipo de plasma es el plasma frio, que se obtiene en un reactor donde se expone la sustancia a radiación ultravioleta. Se aplica para la esterilización de materiales en la industria alimentaria y quirúrgica y en la industria microelectrónica.

---

[35] 2do. Año de preparatoria
[36] 3er. Año de preparatoria

## Desarrollo experimental

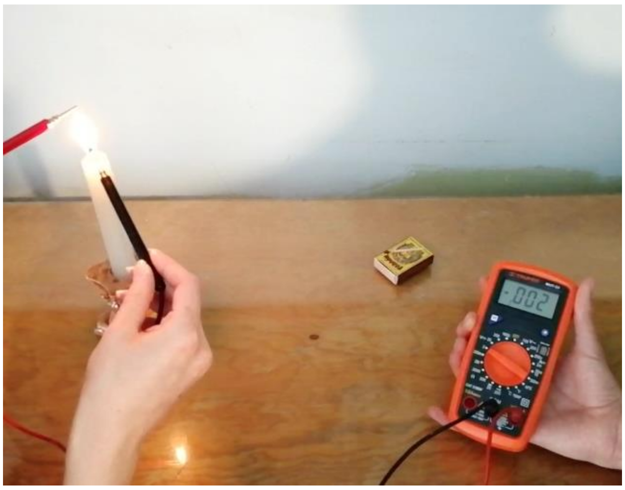


Fig. 3. Resultado del experimento (foto de autoría propia)

La bola de Plasma fue inventada por Nikola Tesla, es una esfera de vidrio sellada conteniendo gases nobles. En el centro tiene un electrodo de alto voltaje conectado a una fuente de alimentación. Al encender la bola la corriente eléctrica ioniza el gas creando plasma.

### *Experimento 1*

En la figura 1 se observa una “varita mágica” tocando la esfera, se concentra el plasma en el punto donde toca la varita el vidrio porque al tener en la punta metal que es un mejor conductor, atrae los rayos hacia ella.

Inicialmente acercamos a la bola de plasma la varita de resina sin la punta metálica pero apenas se veía que se acercaban los rayos, ya que el material del cual está hecha no es buen conductor.

### *Experimento 2*

Se acercó una bombilla fundida a la bola de plasma (figura 2), como la bola de plasma a su alrededor genera un campo eléctrico, provocó que la bombilla se encendiera al ionizar el gas que contiene. Este era el sueño de Tesla, electricidad sin cables.

### *Experimento 3*

Como se mencionó antes, hay diferencias en la opinión de que el fuego sea plasma, por lo cual se realizó un experimento como se ve en la figura 3.

Lo que se quería demostrar aquí es que en la flama de la vela hay la presencia de gas ionizado. Inicialmente intentamos colocar la vela entre las placas de un capacitor casero, ya que si se movía la flama hacia una de las placas significaba la presencia de iones, encontramos dos problemas: la flama se mueve fácilmente con el aire y esto ocasiona errores en la apreciación del experimento; y el voltaje del capacitor, al ser casero era muy pequeño.

Se decidió entonces medir la diferencia de potencial entre el punto más bajo y el punto más alto de la flama, con ello se trató de demostrar la presencia de gas ionizado.

En el experimento, el voltímetro marcó una diferencia de potencial de entre 0.001 y 0.002 volts, lo que indica que si es un plasma, aunque de menor temperatura ya que es una vela, si se hubiera realizado con un mechero Bunsen, la diferencia de potencial sería mayor.

### Respuesta a la pregunta

El plasma es un gas electrificado donde los átomos y moléculas que lo forman están ionizados. En este estado la sustancia contiene iones, pero conservan sus electrones libres por lo que es eléctricamente neutro. Conduce con facilidad la corriente eléctrica.

En un futuro podría ser utilizado para obtener energía eléctrica ya que un gramo de plasma puede generar hasta 26 000 Kwatts/h abasteciendo hasta a 1000 viviendas por un año.

### Referencias

"Física Conceptual" de Paul G. Hewitt. Editorial Pearson
"El Plasma" Biblioteca ILCE, Autores varios
"Plasmas fríos"
http://trappa.iaa.es/sites/all/files/papers/popular_science/plasma_science/2008_00.pdf
"Plasma futura fuente de energía" Tecnológico de Costa Rica
https://www.youtube.com/watch?v=0gTVjfKPYHU
"Qué es el plasma" EM Ingeniería
https://www.youtube.com/watch?v=TEy1pjMEO8QFotos de autoría propia.

# La Física en el patinaje sobre hielo

André Paolo Beverido Gómez
andrebeverido.physicist@gmail.com

## ¿Por qué podemos hacerlo?

El presente trabajo explica el proceso de patinaje sobre hielo mediante leyes físicas y modelamiento físico que permite dicha explicación, resaltando conceptos Físicos como: la suma vectorial, fuerza de fricción y leyes de Newton aplicadas a este fenómeno.

Ilustración 1 patines listos para patinar sobre hielo

## ¿Cómo funciona el patinaje?

Ilustración 2 Patinadores sobre el hielo, patinando "como patos"

Cada invierno, en cada ciudad es una costumbre traer una pista de hielo, en la cual la gente practica este bello deporte artístico, al observarlos no es difícil notar que la manera de patinar no es con los pies rectos, "sino *como pato*" (ver ilustración 2), pero ¿a qué se refiere esta frase?

Para patinar de manera correcta sobre hielo, es necesario tener los pies separados de la vertical que forman juntos por lo menos 30° cada uno a su respectivo lado y dar un deslice por pie uno después del otro, para avanzar en línea recta, pero ¿cómo es que se avanza en línea recta si deslizamos a los lados?

La respuesta es simple, la suma vectorial hace su magia.

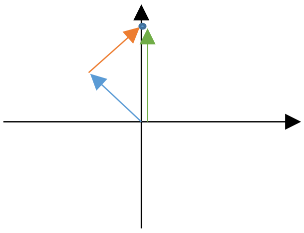


Ilustración 3 Diagrama vectorial sobre el modelamiento del patinaje

Modelando a un patinador como una partícula y analizando su trayectoria de patinaje, se puede modelar un diagrama de vectores desplazamiento (ver ilustración 3), el cual revela el porqué de su movimiento en línea recta, donde el vector azul es el deslizamiento por el pie izquierdo, mientras que el vector naranja es el desplazamiento por el pie derecho, resultando así (por suma vectorial), que el movimiento en sí fue como si se hubiera dado un solo vector desplazamiento en línea recta (vector verde).

Así que la próxima vez que se tenga que patinar, hay que recordar que "*como pato*", la suma vectorial hace su magia.

Ahora que ya se conoce el funcionamiento del patinaje cinemáticamente, se adentrará en la dinámica de este, *¿hay alguna relación entre la velocidad a la cual nos movemos en el hielo y la distancia que recorremos?*

Iniciaremos la respuesta de esta pregunta con ciertos preámbulos, iniciando con la fuerza de fricción.

La fuerza de fricción se define como una fuerza de contacto que causa oposición al movimiento entre dos superficies, es de causas microscópicas, profundizando, microscópicamente todas las superficies -hasta las que han sido pulidas- son extremadamente rugosas y el encaje de estas rugosidades con las de otra superficie genera dificultad para generar movimiento (ver ilustración 4), así que por lo mismo es más difícil poner en movimiento un cuerpo en reposo, que ayudar a continuar con el movimiento de un cuerpo que ya se encuentra en este estado.

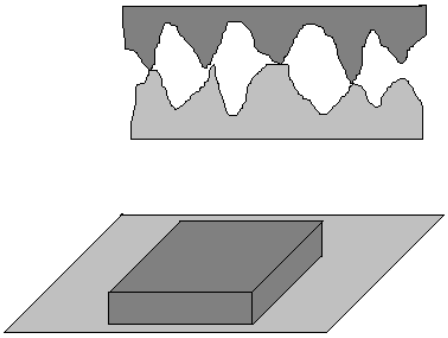


Ilustración 4 Rugosidad microscópica de dos superficies

Debido a este hecho, existen dos tipos de fuerzas de fricción, una estática y una dinámica, cada una de ellas expone cuánta fuerza es necesaria para poder poner un cuerpo en movimiento y cuánta fuerza es necesaria para ayudar a que el cuerpo siga en movimiento, respectivamente

Pero por el momento no hemos definido una fuerza, sin meternos en casos generales como "la derivada del momento de un cuerpo con respecto del tiempo", la segunda ley de Newton nos abre pauta a una definición más sencilla "la fuerza es igual al producto de la masa de un objeto por la aceleración que sufre este", es decir

$$\vec{F} = m\vec{a} \ \ [N] \quad (1)$$

Nótese que la flecha arriba de la "f" mayúscula, destaca que la fuerza es un vector, cuyas propiedades son tener dirección y sentido; además una fuerza en sí tiene la capacidad de promover o impedir el movimiento.

Entonces si toda fuerza es expresada de tal manera ¿cómo es que una silla "pesa"? o ¿por qué al cargar un objeto siento una fuerza hacia abajo?, ¿qué aceleración la provoca?

La respuesta está en la gravedad y aunque es un tema que no se tratará en este artículo, es importante destacar que el "peso" de un objeto es la fuerza ejercida gracias a su masa y la aceleración de la gravedad o "g" (9.81m/s^2), representándose de la siguiente manera:

$$Peso = W = mg \ [N] \qquad (2)$$

Como consecuencia se tiene la siguiente pregunta, si todos los objetos pesan, es decir, ejercen una fuerza, ¿por qué los objetos no se hunden el suelo?

La tercera ley de Newton explica que “si dos cuerpos A y B son tales que A ejerce una fuerza sobre B, entonces B ejerce una fuerza igual y opuesta en A”, es decir “para toda acción, hay una reacción de igual magnitud, pero con sentido opuesto.”

Y es así como nace “la fuerza normal”, definida como la fuerza que ejerce la superficie donde esté actuando un peso para generar equilibrio, en su mayoría de casos la fuerza normal es igual al peso, aunque hay casos en las que no.

En fin, todo lo anterior se definió para dar la fórmula analítica de la fuerza de fricción, la cual se define como el producto entre el coeficiente de fricción estático o dinámico (para la fuerza de fricción estática o dinámica, respectivamente), la cual es una constante experimental que explica la facilidad de movimiento entre dos superficies, por la normal ejercida por la superficie donde se aplique peso (ver ilustración 5)

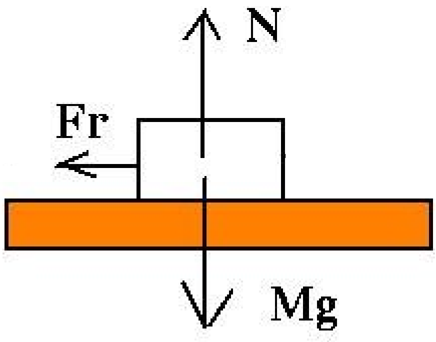


Ilustración 5 Diagrama de fuerzas de un objeto donde se representan todas las fuerzas que actúan

$$F_f = \mu_S N \quad \text{ó} \quad F_f = \mu_k N \quad [N] \quad (3)$$

Finalmente, la última ley de Newton, la ley de inercia, establece que el estado natural de movimiento, continuará en este (a velocidad constante) hasta que una fuerza externa actúe sobre el cuerpo e impida el movimiento, hecho muy destacable en el patinaje sobre hielo, pareciera que el patinador se pudiese deslizar indefinidamente a la velocidad que va, pero en la práctica, este hecho no se cumple debido a la fuerza de fricción entre el hielo y el patín, nótese que la ilustración 5 es un modelo físico de la ilustración 6, donde la ilustración 6 muestra una patinadora profesional cuya velocidad es frenada a causa de la fuerza de fricción.

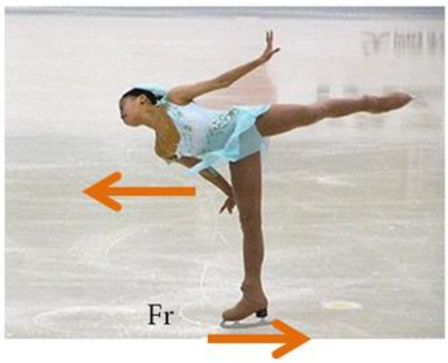


Ilustración 6 Modelo de un patinador mostrando las fuerzas que actúan sobre este

Ahora, para la respuesta de la pregunta planteada casi inicialmente, se define la energía cinética como energía que tiene un cuerpo generada por su movimiento, es decir el producto de su masa por la velocidad inicial del cuerpo al cuadrado, analíticamente se expresa como

$$K = \frac{1}{2} m {v_i}^2 \ [J] \quad (4)$$

De igual manera el rozamiento, se define como la energía perdida debido a la fuerza de fricción, es decir, el producto de la fuerza de fricción por la distancia que recorrió el cuerpo, analíticamente hablando se expresa como

$$R = F_f * d \ \ [J] \quad (5)$$

Entonces al patinar sobre hielo, para obtener una energía cinética primero se debe utilizar la energía potencial química dentro de cada uno (proporcionada por los alimentos consumidos), enfocando el preciso instante en el cual ya se cuenta con una energía cinética, sin seguir incrementando esta y modelando a un patinador cuyo peso se encuentra sobre 2 ejes idénticos que sufren fricción (patines), puede modelar la siguiente ecuación

$$U_Q = K \ \rightarrow \ K + 2R = 0 \qquad (6)$$

¿Por qué la igualdad con el cero?

Al haber fricción, hay rozamiento, intuitivamente como el patinador dejó de generar movimiento (energía cinética), la transferencia de energía se da en la dirección del rozamiento (y otras pérdidas no supuestas), así al avanzar cierta distancia el patinador habrá perdido toda su energía cinética la cual fue brindada al rozamiento y habrá parado su movimiento, quedándose sin energía alguna.

Así, podemos igualar la ecuación (6) como

$$K = -2R \ \rightarrow \ \frac{1}{2}m{v_i}^2 \ = -2\left(F_f * d\ \right) = -2(N * \mu_k * d\ ) \ \ (7)$$

Suponiendo que la superficie es plana, se tiene que la respuesta a la pregunta

$$\frac{1}{2}m{v_i}^2 \ = -2(mg * \mu_k * d\ ) \ \rightarrow \ {v_i}^2 \ = -4(g * \mu_k * d) \ \text{ ó } \quad d = \frac{-{v_i}^2}{4(g * \mu_k)}$$

Observando que la relación entre la velocidad del objeto y la distancia que pueda recorrer a causa de la fricción es independiente de la masa del objeto.

Es decir, un patinador de peso arbitrario si alcanzara una velocidad de 6 m/s y tomando en cuenta que el coeficiente de fricción dinámico entre acero y hielo es de 0.02 y g=-9.81m/s^2, la distancia que pudiese recorrer sería de 45.9 metros.

Sorprendente!!!

En retrospectiva y en respuesta a la pregunta inicial ¿por qué podemos patinar sobre hielo?

Podemos patinar debido a la manera de como se ha hecho, una manera peculiar, “*como pato”*, donde inconscientemente el ser humano ha aprendido a sumar vectores de manera adecuada sin siquiera saberlo, además la poca fricción entre el hielo y el acero de los patines, junto con la aplicación de las leyes de Newton a este arte, son puntos clave, que están escondidos a simple vista pero que resguardan la explicación de este bello deporte.

## Referencias bibliográficas


- Resnick R. & Halliday P. (1960). Física para estudiantes de ciencia e ingeniería. Ciudad de México; Toppan Company
- Frank N. (1957) Introducción a mecánica y calor. Ciudad de México; Grijalbo.
- Serway R. (2015). Física para ciencias e ingeniería. Ciudad de México, Cengage Learning.
- Referencia electrónica
  Fernández J. & Coronado G.. (2019). ¿Qué es la fuerza de rozamiento o de fricción?. 2020, de Fisicalab Sitio web: https://www.fisicalab.com/apartado/rozamiento última fecha de consulta 13/02/2020

# La ciencia en la música

Crisel Escalante Ochoa[37], Christopher Jorel González Escobar[38]
crisel8a@hotmail.com ; christopher_jge@hotmail.com

## ¿Cómo se llevan la música y la ciencia?

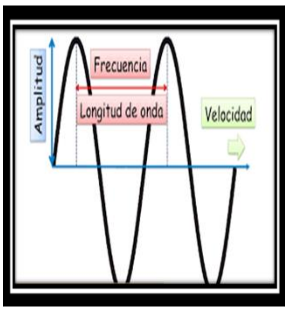
¿Alguna vez te has preguntado si de alguna manera la música se relaciona con la ciencia? ¿Existe alguna fórmula física o matemática para crear música? ¿Pueden el arte y la ciencia formar una amalgama para convivir en armonía? Lamentablemente muchas de estas preguntas no son nada fáciles de contestar ya que ambas ramas de estudio son sumamente complejas. Para contextualizar es necesario profundizar un poco en la materia definiendo primero qué es la música.

La música como medio artístico siempre ha sido tema de estudio y debate respecto al por qué satisface al ser humano, así como también el entender si tiene alguna relación objetiva en la vida de este.

**Nota curiosa:** En el mundo existe un padecimiento sumamente particular, el cual hace que las personas que escuchan música no experimenten ninguna clase de emoción ante esta; son muy particulares los casos en los que una persona no disfruta de esta, a esta condición se le llama anhedonia específica musical y esta afecta aproximadamente al 5% de la población sana.

La música está formada fundamentalmente de sonidos y silencios. El sonido es un tipo de movimiento ondulatorio que puede representarse por una curva ondulante; se pueden aplicar las mismas magnitudes y unidades de medida a cualquier onda. Estas son algunas características de una onda sonora:

•Longitud de onda: indica el tamaño de una onda, que es la distancia entre el principio y el final de una onda completa (ciclo).



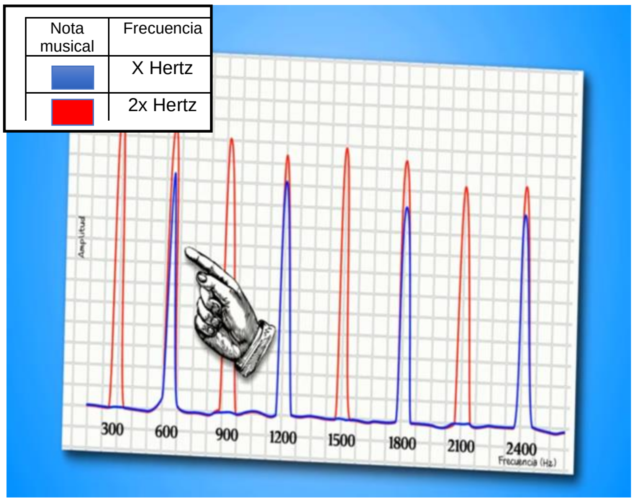

•Frecuencia: número de ciclos (ondas completas) que se producen o que se reciben por unidad de tiempo.

•Amplitud: indica la cantidad de energía que contiene una señal sonora, en pocas palabras es el volumen de un sonido.

[37] Nivel superior, 1er semestre 1er año
[38] Nivel superior, 2do semestre 1er año

•Timbre: Una misma nota suena distinta si la toca una flauta, un violín, una trompeta, etc. Cada instrumento tiene un timbre que lo identifica o lo diferencia de los demás.

Ahora bien, la música es el arte de organizar y combinar un conjunto de sonidos que coexistan de manera armoniosa mientras que un sonido cualquiera no tiene ningún orden establecido; gráficamente hablando podemos decir que para generar una nota musical lo que debemos hacer es encontrar un sonido que encaje con las ondas del movimiento. Veámoslo en el siguiente ejemplo:

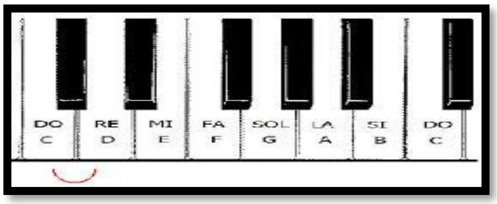



En la imagen podemos observar que si hacemos vibrar una cuerda de una guitarra esta nos generará una nota musical, que tendrá su respectiva frecuencia, pero ¿qué pasa cuando acortamos la longitud de la cuerda a la mitad. Al tocar la nota, también esta generará su respectiva frecuencia. Al comparar los dos sonidos, notamos que tienen una propiedad muy interesante; observando la frecuencia de esta nueva nota vemos que guarda cierta familiaridad con la nota anterior. Las ondas de la nueva nota encajan de manera proporcional con la nota anterior, cambiando únicamente su frecuencia, este tipo de intervalos entre notas se llaman octavas, y estas tienen la característica de ser la misma nota (por ejemplo, un do grave y un do agudo), pero con una mayor o menor agudez sonora; esto se cumple tanto multiplicando o dividiendo la frecuencia de la nota por dos.

Los músicos a lo largo de la historia fueron experimentando con diferentes clases de intervalos, dado a que estos tienen una estrecha relación con el número, pues resulta de la comparación entre magnitudes o entre cantidades, el concepto de proporción se convierte en objeto de estudio que fundamenta la constitución de la escala musical. Toda pieza musical se rige por una escala musical (o más, en casos donde la pieza es más rica en su composición), y esta es la que le da la identidad a la misma; desde que sea una pieza alegre y colorida, a ser una pieza triste y opaca.

En la música existen 7 notas fundamentales, estas son:

DO, RE, MI, FA, SOL, LA, Si; con sus respectivas alteraciones, que en el teclado se producen pulsando las teclas negras. Un intervalo se da entre una nota y la siguiente, por ejemplo, de DO a RE.

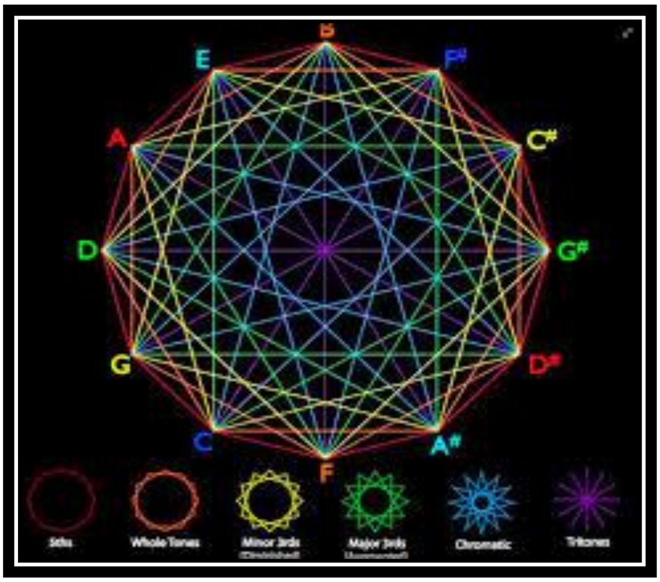


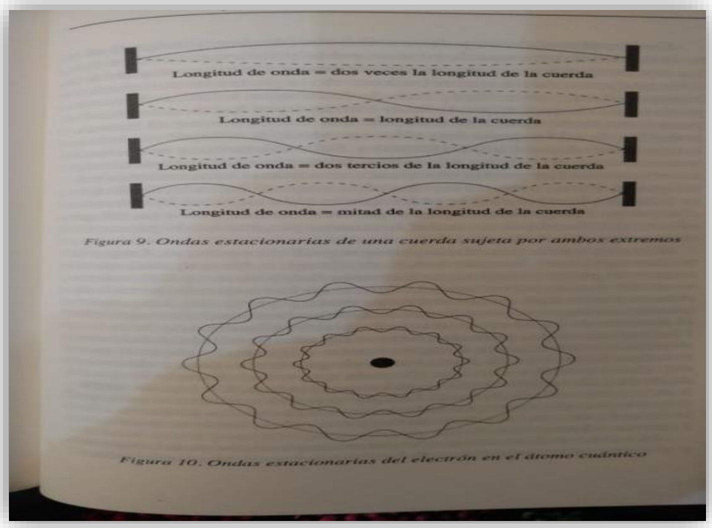


Todas estas notas tienen un por qué y la Matemática elemental juega un papel importante. Retomando la formación de intervalos, se puede notar que si solo usamos intervalos ½ de nota no llegamos a ninguna diversidad musical, hace falta más para poder generar una obra compleja.

Observando más a detalle se hace notar que la forma que se establece es la del famoso círculo de quintas, del cual muchos músicos hacen uso para entender la teoría y composición musical.

Ya hemos visto porqué las notas musicales son de esa forma, ahora necesitamos saber cómo se compone una escala musical. Toda escala musical sigue cierto patrón, este viene precisamente de haber creado el circulo de quintas; nuestro circulo de quintas tiene 12 notas, cada nota tiene un intervalo de ½ tono, y todas ellas generan la ESCALA CROMATICA a partir de esta podemos generar las escalas que darán su toque característico a las piezas musicales con algo llamado teoría de escalas bien formadas.






**Nota curiosa:** Las ondas estacionarias producidas por los instrumentos de cuerda se comportan de la misma manera que las ondas estacionarias producidas por los electrones alrededor del núcleo atómico, esto es, se produce una amplia variedad de ondas estacionarias que poseen el rasgo distinto de estar compuestos por múltiplos enteros de la longitud de onda media, es decir, no números fraccionarios. Y ello significa, dada la relación que existe entre la frecuencia y longitud de onda que, al pulsar una cuerda de guitarra, sólo puede vibrar en determinadas frecuencias, estando otras prohibidas. Así mismo, el electrón solo puede estar en niveles de energía compuestos por múltiplos enteros del estado fundamental, es decir, con la menor frecuencia, estando otros niveles de energía estrictamente prohibidos para el electrón.

Es claro que la percepción de cada pieza puede llegar a ser algo más subjetivo, pero hablando de manera generalizada podemos hacer un arquetipo de cada escala musical con respecto a lo que expresa.

Una vez que hemos establecido como un sonido musical puede llegar a ser percibido de manera física y matemática surge una nueva pregunta ¿pero es que acaso la música solo se compone de sonidos armoniosos?

Por mucho que sea un medio expresivo debe seguir ciertas normas para considerar algo como música, una de las reglas más fundamentales es el ritmo, pulso o beat. Muchos expertos lo consideran parte primordial y esencial, creyendo que su existencia viene dada antes que la melodía y la armonía; el ritmo, definido como la sucesión y reiteración de acontecimientos en el tiempo. Los siguientes puntos explican la importancia del ritmo en la música:

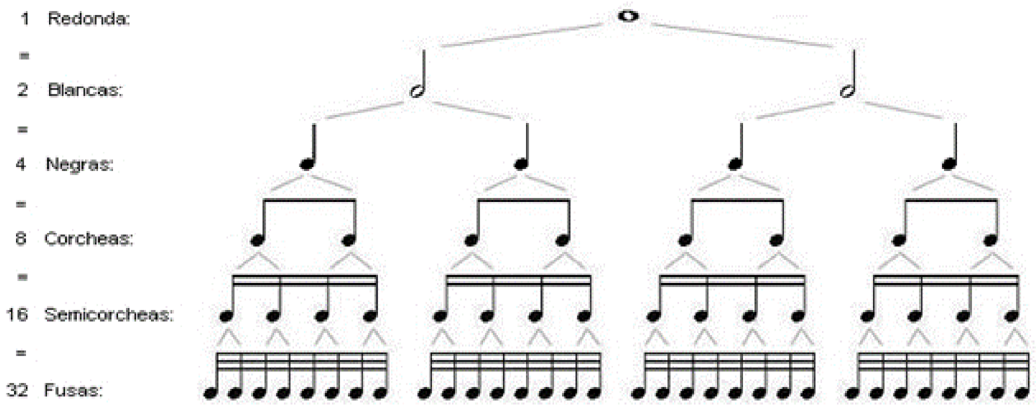
•El ritmo en una pieza musical es como el pivote que utiliza la pieza para generar sonidos, este ritmo generalmente va de manera constante, es decir que no hay diferencia entre uno y otro (a pesar de que el sonido si puede variar),

•Al intervalo de tiempo que hay entre cada pulso se le llama tempo, y su unidad es el pulso/minuto o beat/minuto.

•En un conjunto de pulsos puede existir alguno en particular que se toque con mayor fuerza que los otros, a este pulso en específico lo llamamos acento y nos ayuda para saber distinguir el compás de una pieza musical.

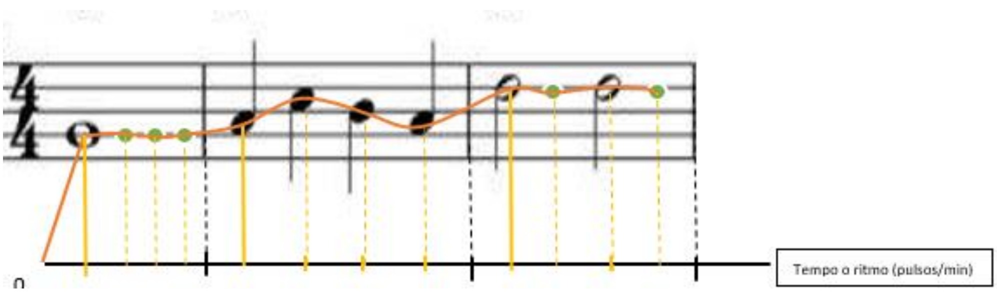
•Compas: fragmento rítmico entre dos pulsos fuertes subdividido en dos en relación con el pulso binario y ternario, correspondiendo a un compás simple y compuesto respectivamente. Dependiendo de la división de pulsos fuertes podremos determinar el compás de una pieza musical.

Una vez definido bajo que términos podemos crear música lo siguiente es entender como expresarnos en nuestro espacio de trabajo. Como un pintor que tiene un lienzo en blanco para expresarse, debe saber que herramientas están a su disposición y como usarlas, se sabe que no puede usar un sartén para generar una pintura (o no de la manera convencional) si no que debe usar pinceles y pinturas para poder expresarse; pues bien en el caso de la música nuestras herramientas serían las FIGURAS MUSICALES, estas son las figuras empleadas para determinar la duración que mantenemos tocando una nota y estas junto con los silencios nos permiten hacer música.




Pero, así como el artista tiene su entorno del cual no se puede salir para pintar, los músicos también tienen ciertas delimitaciones que en este caso sería nuestro compás; aquí el objetivo del compás es determinar cómo acomodar las figuras musicales a manera que sigan bajo el dominio del compás.

Después de toda esta información acerca de la teoría musical, notamos que cada pieza musical está regida por un ritmo y un compás que nos indica como introducir las figuras musicales, podemos ver que se crea una relación matemática, donde el ritmo es nuestra constante y el compás delimita el número de notas por sección; esta relación nos permite moldear todas nuestras figuras musicales a manera que sea congruente. El pentagrama es la herramienta principal donde los compositores plasman sus ideas, obviamente como ya se dijo antes bajo ciertos estándares, de los cuales haciendo un análisis podremos encontrar la relación natural que hay entre las matemáticas y la música.



Diseccionando el pentagrama se observa que al principio tenemos algo parecido a una fracción, esta es la norma que se debe cumplir rítmicamente por compás, aquel que nos dice la capacidad de notas que hay entre cada uno. Luego tenemos las líneas punteadas de color negro, estas nos indican donde empieza y termina cada compás, muchas veces la composición de estos no es equivalente uno con otro, esto se hace principalmente por convención ya que es más fácil acomodar una pieza si se modifica la amplitud de ciertos compases, mas no significa que en valor se modifique su capacidad de pulsos. Lo siguiente son las líneas amarillas, en estas tenemos de dos tipos, una la cual es completa y nos indica la nota acentuada, es decir, la nota que indica el inicio del compás; las líneas punteadas nos indican las demás porciones del compás, nótese que cada compás tiene 4 líneas amarillas de las cuales 1 es acentuada y las otras 3 son normales, esto quiere decir que se cumple la normativa propuesta al inicio del pentagrama. Pero podemos ver que no en todo compás existen notas que estén ligadas a las líneas amarillas; esto es debido a la equivalencia propuesta anteriormente donde vemos que una figura musical puede valer en cantidad lo mismo que otras, aun así, es por eso que denotamos esos espacios con un círculo verde, para señalar que a pesar de que no haya notas en ese pulso, se toman en consideración esos pulsos. Al unificar todo obtenemos nuestra gráfica que se va dibujando con respecto al “RITMO” o “TEMPO” asignado, tal como lo que pasa con una relación, al resultado de esta le llamaremos MELODIA y es uno de los componentes principales en toda pieza musical.


Sea cual sea la pieza que escuches, estará regida por un ritmo y por consiguiente su respectivo compás, y con todas las figuras musicales la cantidad de combinaciones es casi infinita;

**Nota curiosa:** Los inicios de la música se remontan a la edad de piedra, donde el ser humano a pesar de ni si quiera tener un sistema de comunicación refinado, ya podía generar una especie de música primitiva con la cual sentían placer. Obviamente no eran obras complejas ni abundantes en expresividad ya que principalmente estaba formado de percusiones, pero aun así es extraordinario como nuestros antepasados lograron entender ese orden que está presente en la música y; resulta muy curioso que todo este tema del ritmo se dio de manera natural en el ser humano.

## Respuesta a la pregunta

Podemos llegar a la conclusión de que la música se distingue por tener un orden tanto tonal como rítmico, ya que si no fuera así no podría ser considerada más que caos sonoro, o dicho de otra manera ruido sin sentido, y que como ya se ha recalcado tiene mucha relación con la matemática y la física ya que estas se rigen por ciertas normativas. No por esto queremos encapsular a la música como algo cuadrado y sistemático, sino más bien aclarar que aun estando bajo ciertas leyes de las cuales no puede pasar, se puede crear una obra expresiva y que transmita un sentimiento.

El hecho de mostrar este contenido es el hacer notar que la ciencia reside en la música y en muchas ramas del arte de manera natural de tal forma que, aunque a primera vista puede resultar muy contrastante, lo cierto es que está implícita a la hora del momento creativo.

## Fuentes de consulta

Manjit Kumar. (2008). Quántum. Barcelona, España: Kairós, S.A.

https://lanubedospuntocero.wordpress.com/2018/07/30/es-posible-el-silencio-absoluto/

imágenes extraídas de:

https://www.google.com/imgres?imgurl=https%3A%2F%2Fi.pinimg.com =8

https://www.youtube.com/watch?v=P7iC-fbdKmQ

# El Experimento de Oersted

Hernández Fuentes Aldo Isaac, Hernández Fuentes Ángel Iván
postdream13@gmail.com, Isaac.honor0@gmail.com

## ¿Cuál es la relación entre el magnetismo y la Electricidad?

Hasta 1819, todo el mundo creía que el magnetismo y la electricidad eran fenómenos diferentes. En esos años las tres fuerzas fundamentales conocidas eran el magnetismo, la electricidad y la gravedad.

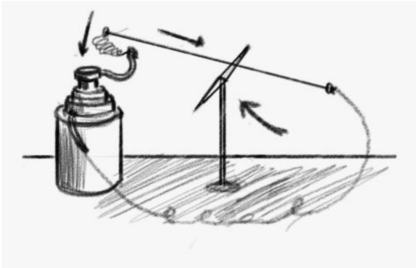


Ilustración 7 (Experimento de Oersted)

## ¿Sabías que…?

Actualmente se consideran 4 fuerzas de la naturaleza o Fuerzas Fundamentales, las cuales se manifiestan en interacciones, las cuales tiene un sentido propio, y son:

**Gravedad**: Interacción entre masas, la cual usa como escala el peso y en esta se hace responsable el movimiento planetario y estelar.

**Electromagnetismo**: Interacción entre cargas eléctricas, que se manifiestan en campos magnéticos y se relacionan entre sí.

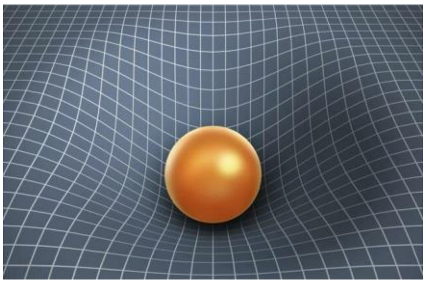


Ilustración 8 (Ejemplo de la Gravedad)

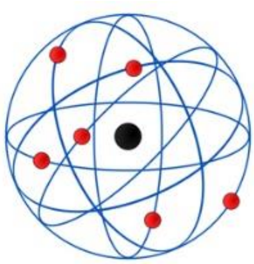


Ilustración 9 (Composición de un átomo)

**Fuerza nuclear Fuerte**: Interacción entre partículas elementales caracterizadas por un “Color”. Los cuales están relacionados con los neutrones y Protones.

**Fuerza Nuclear Débil**: Es responsable de algunos procesos nucleares, como espontáneamente se descompone en un protón, un electrón y un antineutrino

**Hans Christian Ørsted (14 agosto de 1777 - 9 de marzo de 1851)**


Fue un físico y químico danés, que influenciado por el pensamiento de Immanuel Kant y la Filosofía de la Naturaleza, logro un gran estudio del Electromagnetismo. Ya que en 1813 predijo la existencia del Electromagnetismo, pero hasta en 1820, lo demostró con su experimento, el cual era dirigido a sus alumnos.

**Respuesta a la pregunta.**

El Experimento de Oersted logro la unión de estas dos investigaciones haciéndola una para su mejor explicación.

El Experimento de Oersted consiste en Colocar una aguja imantada próxima a un conductor por el que circulaba una corriente eléctrica. Increíblemente la aguja se desvió evidenciando la presencia de un campo magnético. La conclusión era bastante sencilla: las corrientes eléctricas generan campos magnéticos, demostrándose de esta manera la relación entre corrientes eléctricas y campos magnéticos.

Aunque el experimento es algo muy empírico, tiempo después se pudo dar un seguimiento correcto para su demostración con lo cual se obtuvo la (formula Biot-Savart)

el experimento de Oersted y algunos de los experimentos de Faraday, los cuales lograron dar como resultado una de las Fuerzas Fundamentales “Electromagnetismo”.

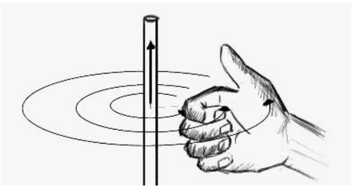


Ilustración 10 (Ley de la mano Derecha)

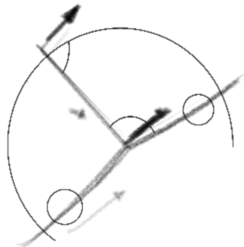


Ilustración 11 (Formula de Biot-Savart)

Referencias.

https://www.edumedia-sciences.com/es/media/56-experimento-de-oersted

http://museovirtual.csic.es/salas/magnetismo/mag8.htm

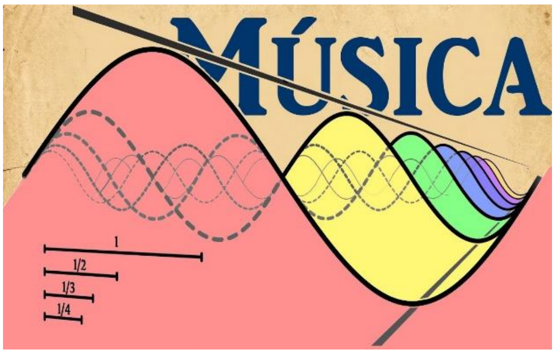
http://dfists.ua.es/experiencias_de_fisica/index10.html

# Las relaciones de las matemáticas con la música

Ibarra Hernández Rodrigo

bartolomeo_ih8**@hotmail.com**

## ¿Qué tiene que ver la música con las matemáticas?

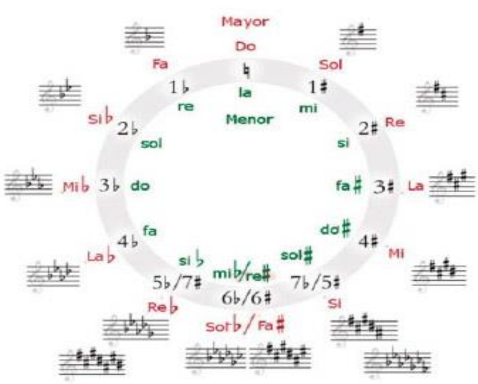



Es común escuchar que “hay Matemática en la Música porque cuando se abre una partitura ésta está llena de numeritos”, es decir, de los números del compás y las digitaciones. Obviamente esta observación es muy simple.

Hay desde luego similitudes innegables, como que ambas tienen algo de mágico, son tan abstractas que parecen pertenecer a otro mundo, y sin embargo tienen gran poder en este mundo; la música afecta al que escucha y las matemáticas tienen múltiples aplicaciones prácticas. Una parte de las matemáticas estudia los números, sus patrones y formas y estos elementos son inherentes a la ciencia, la composición y la ejecución de la música.

## La música en la época antigua

En tiempos de la antigua Grecia, la Música no sólo se consideró como una expresión artística de las Matemáticas, sino que su estudio y análisis estuvo siempre ligado a la Teoría de los Números y a la Astrología. De hecho, para los griegos la teoría matemática de la música formaba parte de una teoría general conocida como la Armonía del Cosmo.




La música cambia su textura y carácter según el lugar y la época. Puede ser cristalina o densa, sentimental o explosiva. Por su parte, las matemáticas son directas, nunca alteran su carácter. La música se crea a partir de algo físico, instrumentos de todo tipo de materiales la producen. Las matemáticas son, sobre todo, abstracciones que no necesitan ni siquiera papel y lápiz. El mundo actual no podría concebirse sin ellas.

**Respuesta a la pregunta “¿Qué tiene que ver la música con las matemáticas?”**

La música está cargada de emociones, es alegre o triste, suave o agresiva, puede ser espiritual, estética, religiosa; En la matemática no podemos hablar de un teorema “triste” o de una demostración “agresiva”, pero sí genera emociones en quienes las producen y en quienes las usan, además de que poseen una belleza que no todos podemos percibir.

Tanto el matemático como el músico se encuentran ocupados resolviendo problemas o componiendo o interpretando, enseñando a alumnos sin detenerse a pensar que ambos están entregados a disciplinas que son paradigmas de lo abstracto y que amas son un arte.

Nivel 6 y 3er año de vocacional

# Tránsito de Mercurio Observado por la comunidad Politécnica

Guillermo Alfonso Del Moral
galfonsodelmoral@gmail.com 57296000 EXT. 55360

## ¿La observación del tránsito de Mercurio puede ser un evento formativo para los estudiantes del Club de Astronomía?

Parte de las actividades del programa anual de trabajo del club de Astronomía de la ESFM, fue preparar y entrenar estudiantes para la observación del Tránsito de Mercurio, que ocurrió el día 11 de noviembre de 2019. La tradición de observar eventos de esta naturaleza fue registrada por científicos mexicanos desde el siglo XIX, en una expedición coordinada por Francisco Díaz Covarrubias[39] con la finalidad de medir la distancia de la Tierra al Sol, dato que no se conocía en ese entonces. Como una forma de honrar la memoria de esos investigadores, el club de Astronomía de ESFM se dio a la tarea de entrenarse para la observación y registro de ese evento y dejar testimonio escrito y gráfico para su documentación y compartirlo a su vez con estudiantes y público que asistió a las instalaciones de la ESFM para observarlo. Desde antes del amanecer ya había ocurrido el inicio del evento en otras latitudes. En nuestro sitio de observación fue visible a partir de tener acceso al Sol, de acuerdo a lo que permitió el horizonte del que disponemos; a partir de ese momento, se hicieron imágenes y videos, los cuales se presentan en este proyecto de divulgación que compartimos con la comunidad.

Palabras clave:

Tránsito, Observación, Sol, Mercurio

## Introducción

Lo que se busca compartir con la comunidad del Politécnico han sido eventos que pocas veces se observan. El caso del tránsito de Mercurio por el disco solar es un fenómeno entre otros que nos hemos dado a la tarea de registrar en imágenes, y a su vez compartirlas en diferentes foros afines a las Jornadas de Didáctica de la Ciencia, que en su tercera edición, es el marco adecuado a los fines que busca el Club de Astronomía de la ESFM.

## Marco teórico

Un tránsito como fenómeno astronómico ocurre cuando desde nuestro planeta es factible observar la trayectoria de los planetas internos que giran en torno al Sol y que anteceden a la Tierra en sus órbitas de rotación, es decir podemos observar los tránsitos de Mercurio y Venus. La ocurrencia de ambos es factible si se presentan las siguientes condiciones.

1.- Que se produzca una alineación entre el Sol, Mercurio y la Tierra.

[39]

Es de notarse que para que se cumplan estas condiciones deben coincidir en sus órbitas tanto Mercurio como la Tierra, el problema es que cada uno de los planetas involucrados presenta inclinación en su eje de rotación y por lo tanto la coincidencia entre las órbitas se presentará en condiciones muy particulares en cada uno de ellos.

En razón de que cada planeta presenta órbitas diferentes y a su vez inclinaciones distintas, el comportamiento de los tránsitos planetarios será factible cuando coincida el plano de la órbita de Mercurio con el plano de la órbita de la Tierra, también llamado eclíptica, como se ilustra en el diagrama que se muestra.

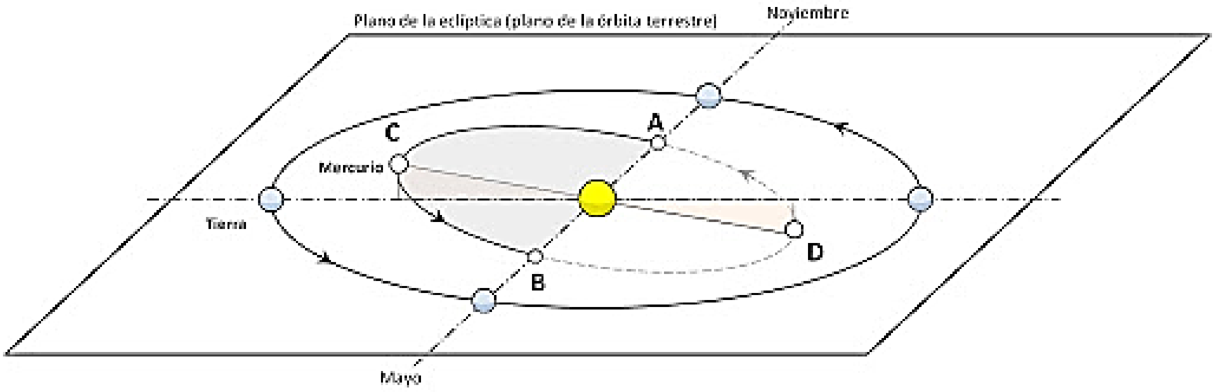



Figura 1[40]. Planos de las órbitas Mercurio y la Tierra

Se puede entonces inferir que los tránsitos de Mercurio ocurren en los meses de Noviembre y Mayo, en éste caso ocurrió el 11 de Noviembre, como lo pudimos constatar de acuerdo a las imágenes que se obtuvieron.

Cada una de ellas entraña su problemática particular en virtud de que se combinan e interactúan diferentes componentes que se pueden resumir en lo siguiente:

Cada telescopio tiene una distancia focal específica.

A cada distancia focal corresponde una apertura, la cual sirve para determinar el tamaño de la imagen a obtener, dependiendo de la cámara de captura que se utilice.

Finalmente la técnica a emplear y que está en función de los resultados que se buscan obtener, como son: detalle, tamaño de imagen, resolución etc.

Es así la importancia de lograr una captura de imagen adecuada dado que se intenta fotografiar un planeta con un diámetro aproximado de 3700 kilómetros a una distancia de una unidad astronómica que en promedio es de 150 millones de kilómetros y que en este caso la primera imagen obtenida con telescopio de

[40] Sitio de internet

8 pulgadas de apertura convertido a una relación focal de f6.3 mostró el siguiente resultado.

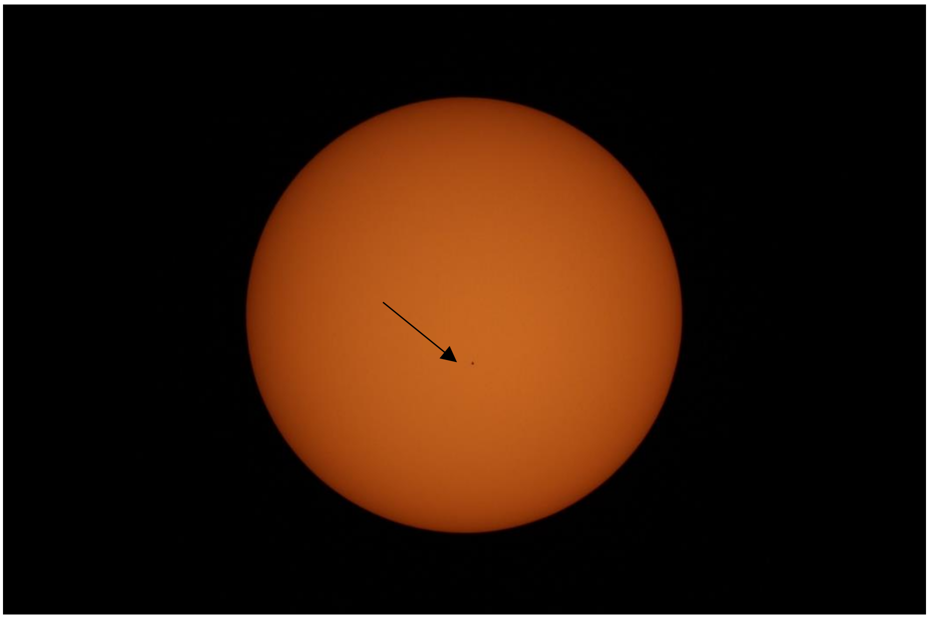


Figura 2. Telescopio SC de 8 pulgadas en una relación focal f 6.3 con una cámara Canon T5i

Figura 3. Imagen del 9 de Mayo de 2016

Figura 4. Tránsito de Mercurio Mayo de 2016

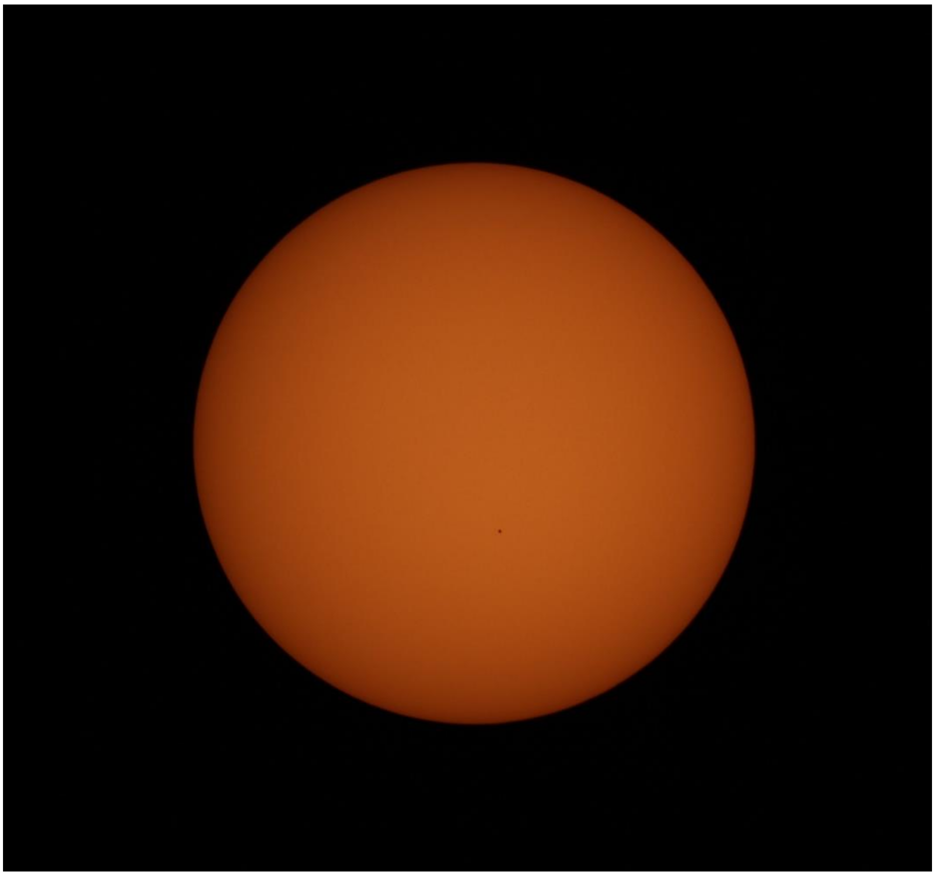


Figura 5. Tránsito de Mercuiro11 de Noviembre de 2019

En los trabajos realizados por parte de miembros del Club de Astronomía de ESFM se han registrado dos tránsitos ocurridos en las fechas del 9 de Mayo de 2016 y el 11 de Noviembre de 2019 (figuras 2 a la 5).

## Metodología

Para hacer esto posible fue necesario practicar y ensayar en diferentes ocasiones con el propósito de elegir la mejor opción para disfrutar del evento, compartirlo y evitar riesgos innecesarios por observar el Sol, lo cual requiere normas de seguridad para no dañar la vista.

Las normas de seguridad son:

Cuando se observa el Sol con telescopio es necesario utilizar filtros adecuados que son de dos tipos principalmente

a).- Filtros INCONEL que están construidos con vidrio de calidad que en ellos se depositan películas delgadas de aleaciones de metal y rechazan más del 99% de la luz Solar.

b).- Filtros Solares de polímero especial que también rechazan la luz solar en más del 99 %.

**Es conveniente mencionar como regla de oro que nunca hay que observar el Sol sin filtro porque produce ceguera permanente.**

Ambos filtros vale decir deben ir colocados en la boca del telescopio, independientemente del diseño óptico que esté construido el instrumento, por lo regular son de apertura completa.

También se debe considerar lo que se utilizará para capturar las imágenes, que en estos casos puede ser que se usen cámaras digitales de preferencia las que se conocen como SRL o cámaras réflex de lentes intercambiables, o en su defecto las cámaras CCD o cámaras CMOS dependiendo del tipo de sensor que utilicen. Asimismo, se deben considerar las dimensiones del diámetro del Sol que se deseen obtener, por ejemplo:

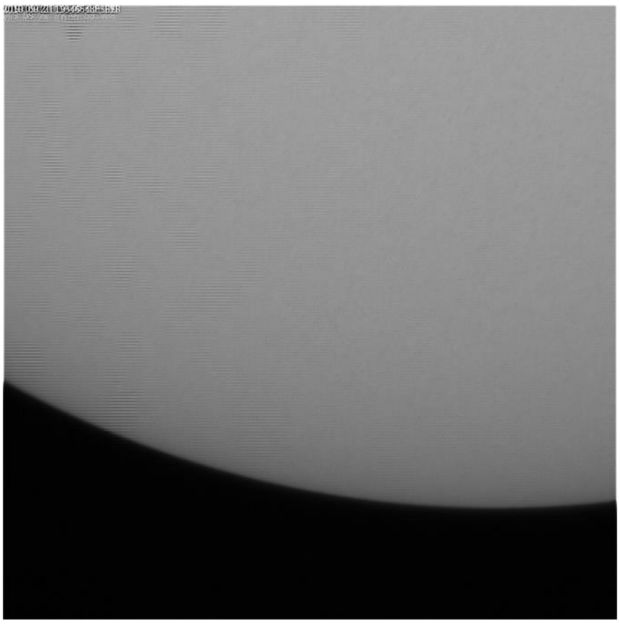


Figura 6. Imagen obtenida con telescopio de 1250 mm de distancia focal con filtro de polímero y cámara con sensor CCD

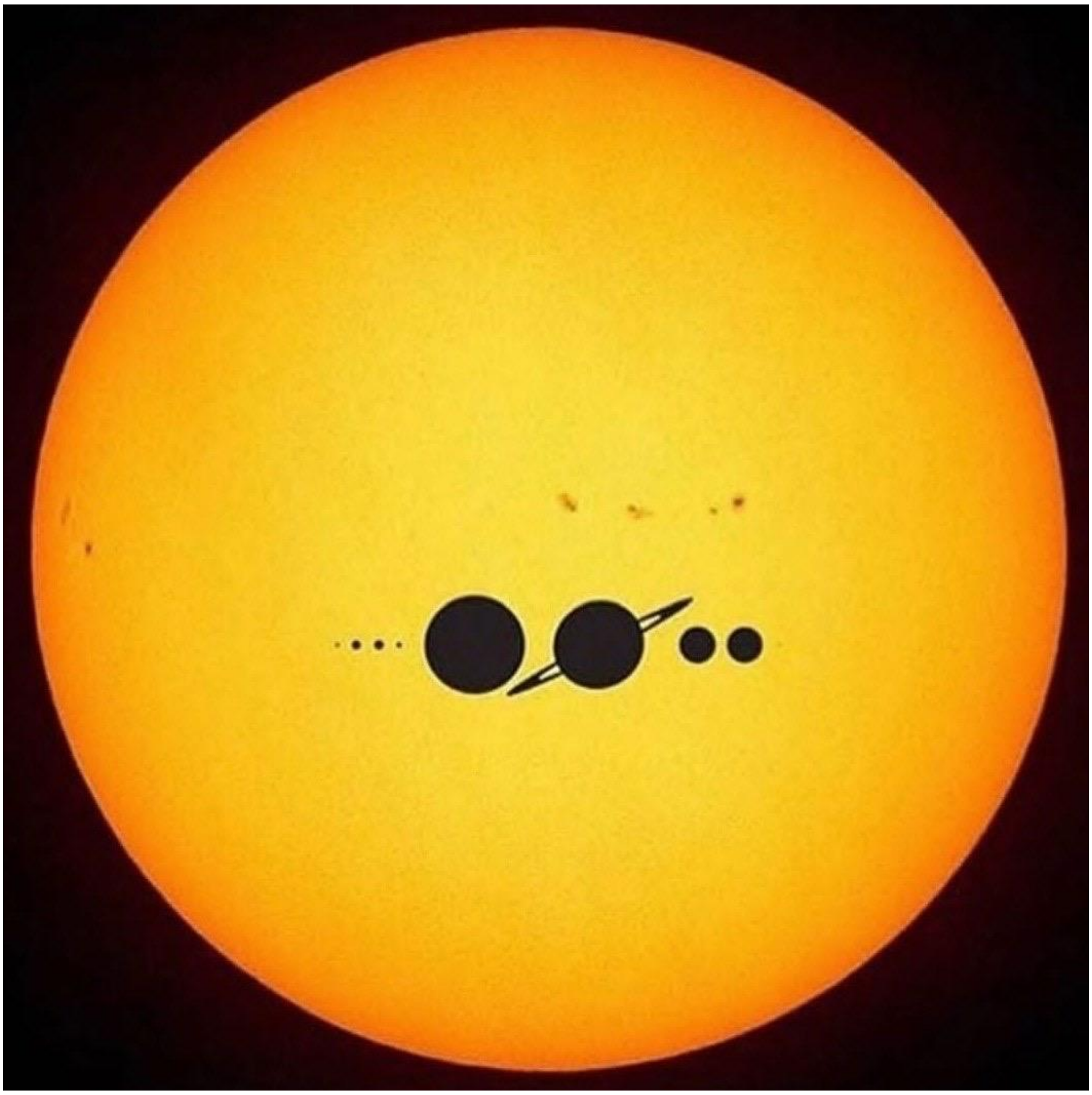


Figura 7. Diámetros de comparación de los planetas del Sistema Solar con respecto al Sol

Se utilizaron diferentes combinaciones de telescopios y cámaras, como parte de las prácticas de capacitación y entrenamiento. Posteriormente se analizaron para determinar el equipo a usar y para organizar los equipos para atender los instrumentos que se usaron durante el tránsito de Mercurio (Figuras 8 a la 17).

Figura 8. Imágenes para comparar el diámetro de Saturno y Júpiter utilizando los telescopios y cámaras empleadas en el tránsito de Mercurio.

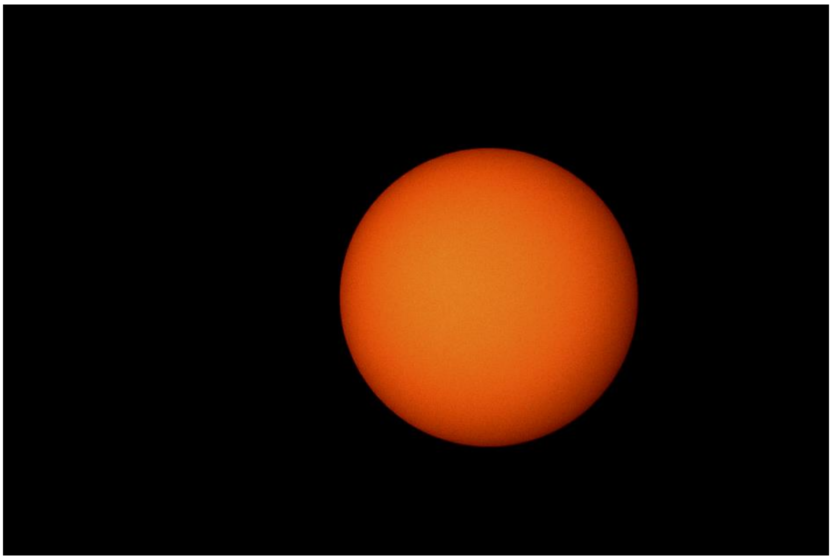


Figura 9. Imagen obtenida con telescopio de 400 mm de distancia focal y cámara Canon T5i

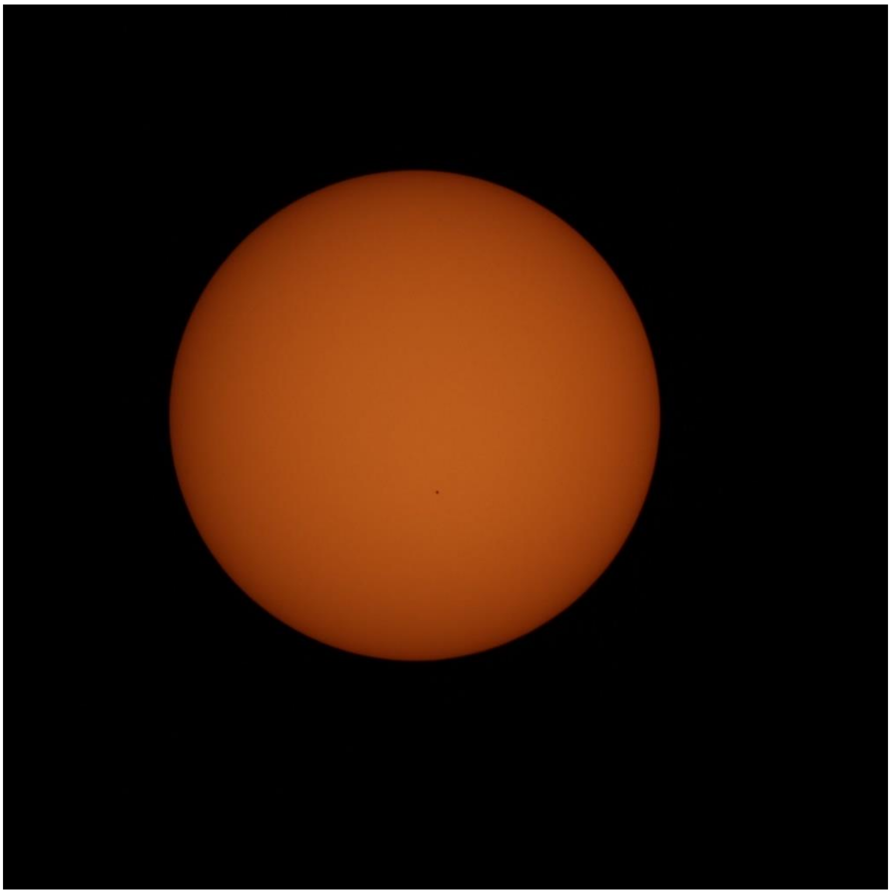


Figura 10. Imagen obtenida con telescopio de 1250 mm de distancia focal con reductor focal para convertirlo de f10 a f 6.3 con cámara Canon T5i.

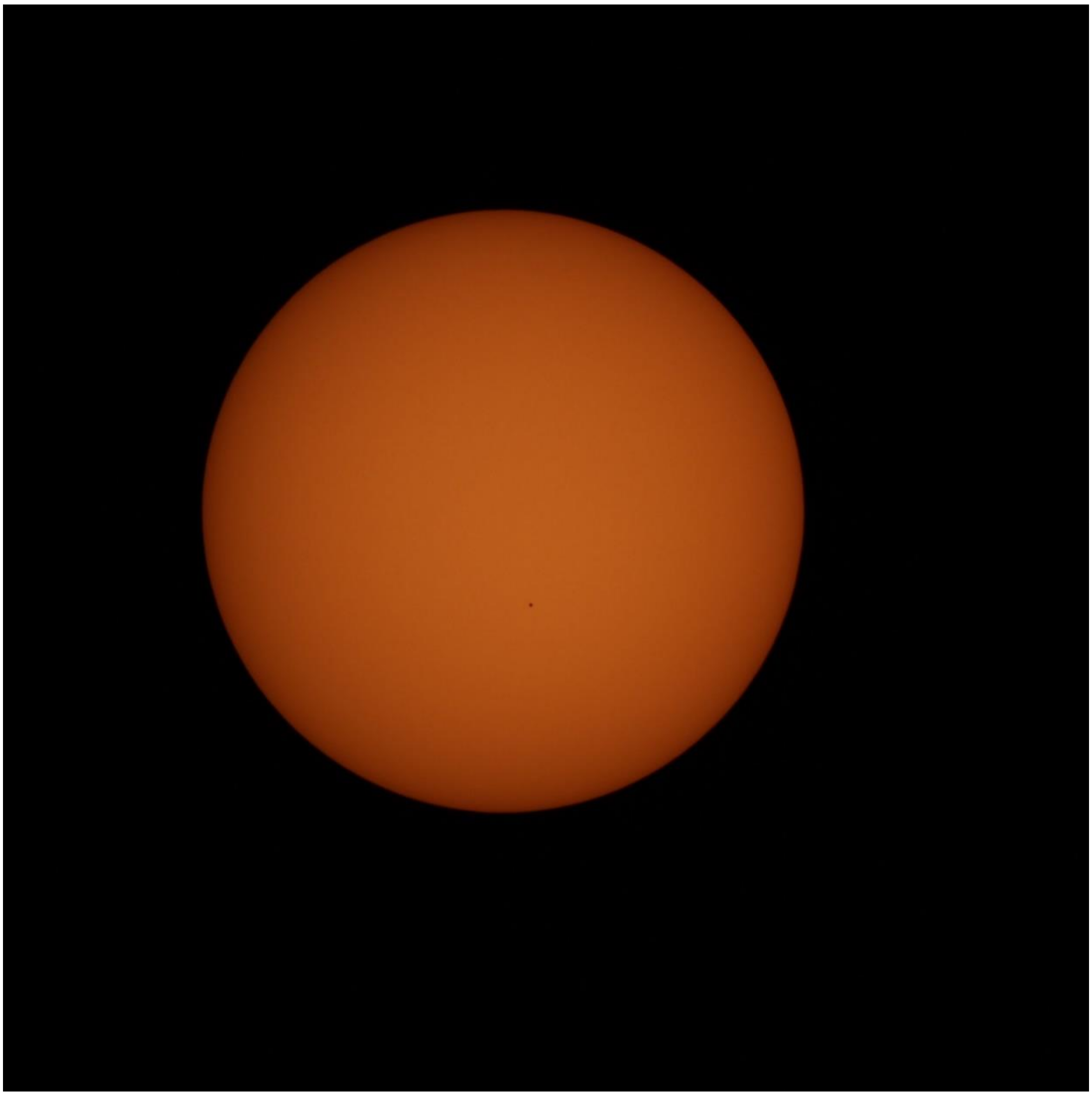


Figura 11. Toma realizada con telescopio SC. De 2003 mm de distancia focal convertido a f6.3 para obtener una distancia focal de 1261.89 mm con cámara SRL réflex.

Figura 12. Ensayo para la planeación del evento

Figura 13. Orientación y calibración del equipo

Figura 14. Armado de la montura ecuatorial


Figura 15. Ajuste de la barra de contrapesos

Figura 16. Colocación del filtro solar Inconel

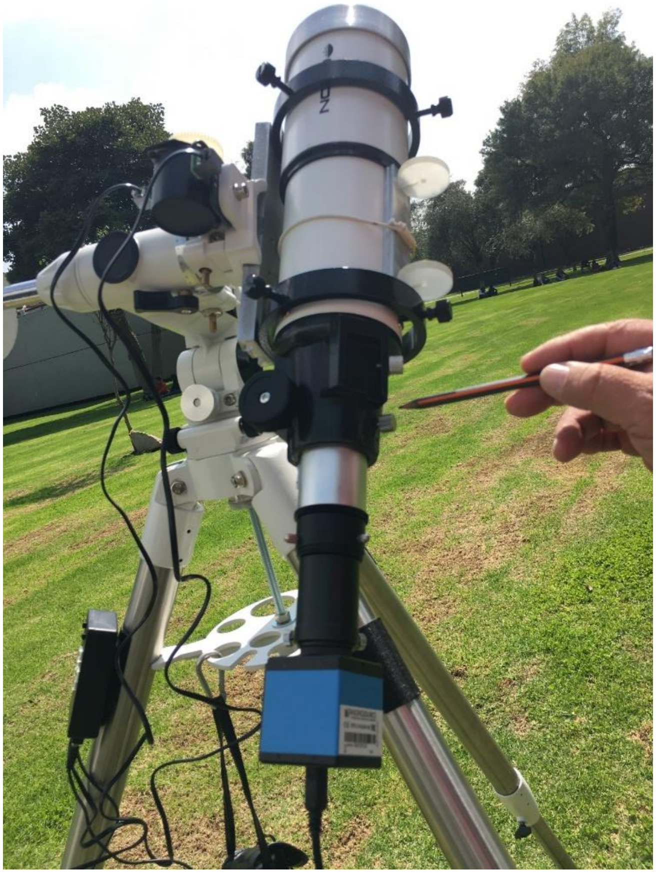


Figura 17. Arreglo final para la toma de videos en el siguiente orden: Filtro, telescopio de 400mm de distancia focal, tubo de extensión, cámara con sensor de color conectada a la computadora y de esta directamente a la pantalla de proyección de 43 pulgadas.

## Respuesta a la pregunta

A manera de conclusión podemos decir que se logró con creces el objetivo que nos propusimos al promover y difundir una actividad que pocas veces se realiza, por los periodos tan largos en que ocurren y que hacen difícil el poderlos disfrutar nuevamente, no obstante el registro de este tipo de eventos y otros similares aportan a la formación de los estudiantes en otros renglones importantes para el fomento a la cultura, el compartir una afición y mostrar a la comunidad politécnica las posibilidades de expandir horizontes dentro del terreno de la experimentación y el aprendizaje de otro tipo de habilidades y técnicas que no se practican dentro de la formación curricular de la escuela. De igual manera, el hacer contacto y vincularnos con otras escuelas dentro del Instituto trajo consigo nuevas responsabilidades en el renglón de abrir espacios a la cultura y la práctica científica como lo evidencian las imágenes presentadas que integraron a otros docentes de escuelas como ESIME Zacatenco, ESIME CULHUACAN, ESIA TECAMACHALCO Y ESIQUIE.

Se agradece el respaldo de la Dirección y Subdirección Administrativa en todo lo referente al apoyo de infraestructura, apoyo operativo y buena disposición para llevar a buen término el evento, así como los docentes de ESFM que asistieron para disfrutar de lo que se mostró con seguridad y con agrado compartimos.

Las técnicas usadas para producir imágenes a partir de videos y apilamiento de imágenes formaron parte del entrenamiento.

Lo presentado en su mayoría son imágenes directas de la cámara SLR Canon T5i. Los factores de recorte (Crop )[1] aplican para el uso de las cámaras utilizadas en virtud de que ambas producen aumentos diferentes en función de que una cuenta con sensor CCD de color y la otra es una cámara con sensor APS y no es ***full frame.***

## Referencias

Moreno Corral Marco A. (Compilador) Historia de la astronomía en México. La Ciencia desde México No.4 Fondo de cultura Económica, México 1986.

## Diagrama 1

(https://www.google.com/search?q=orbita%20de%20mercurio&tbm=isch&tbs=rimg%3ACRYjM5fa1nxOImD7E0YgGzZ3CbFMB3wO1EewiMgGvzjNE1MXwnZkoXotCGtwtfHj54cwz3as41yVGKtITPCDJxcLZlUB_1Z-MLtIkTp0CQjJGT4RHhVxtI3GURA0ntQpgowpTadEf5D6X6BYqEgn7E0YgGzZ3CREASTJnLKVKFCoSCbFMB3w 2020)

[1] https://blasfotografia.com/factor-de-recorte-de-un-sensor/

.

# Construyendo una ventana al universo

Jesús Alberto Flores Bermúdez
j.albertofloresb@gmail.com
Guillermo Alfonso del Moral
galfonsodelmoral@gmail.com 57296000 Ext. 55360

## El universo detrás de un telescopio

Un telescopio es uno de los instrumentos más deseados por aquellos que están interesados en el mundo de la ciencia, especialmente en la astronomía. Desde un niño curioso hasta un astrónomo profesional, quienes observan a través de un telescopio pueden descubrir objetos nuevos en el cielo, misteriosos e intimidantes, pero finalmente espectaculares.

*Aún recuerdo la emoción que sentí al ver por primera vez la Luna, a través de un pequeño telescopio, desde el balcón de mi casa. Sin duda alguna fue un evento inolvidable y espléndido. Es por eso que a veces me gusta imaginar que en el mundo cada noche hay al menos un niño apuntando por primera vez al cielo con un telescopio; un cielo que lo está esperando lleno de sorpresas e interminables aventuras.*

En la actualidad es mucho más sencillo y barato obtener un telescopio de lo que fue para los primeros astrónomos, cuando dichos instrumentos eran un objeto verdaderamente exótico. Sin embargo, el costo de los telescopios sigue siendo elevado para algunos astrónomos aficionados o para algún curioso que quiera echar un vistazo más profundo a la bóveda celeste. Lo que lleva a algunas personas al desaliento y a algunas otras a un sacrificio económico.

## Construyendo una ventana al universo.

*Con la finalidad de poder observar el cielo de una mejor manera y poder descubrir todo ese panorama que es invisible a los ojos, es que decidí construir mi propio telescopio reflector.*

*Actualmente me encuentro en el proceso de tallado del espejo primario y en la elaboración de la celda para el primario.*

*A continuación, comparto la experiencia que he podido adquirir en este proceso de construcción.*

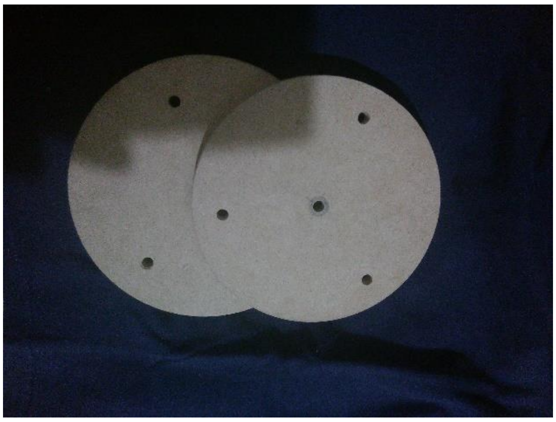


Ilustración 12. Construcción de celda del primario.

## Trabajo artesanal óptico

En los recientes años y con el crecimiento del internet, se ha popularizado enormemente el trabajo artesanal, gracias a toda la información que se puede encontrar hoy en día al navegar en la red. Desde blogs de aficionados hasta páginas especializadas o canales multimedia, se han convertido en manuales prácticos para quienes deciden comenzar un proyecto artesanal.

Ilustración 13. La información sobre trabajos artesanales se ha popularizado en internet.

No obstante, hay una pregunta que difícilmente puede responder de manera precisa: ¿Cómo puedo construir los elementos ópticos de un telescopio? Internet está lleno de información acerca del funcionamiento de un telescopio, de las propiedades ópticas de una gran cantidad de materiales e incluso de la construcción de un telescopio. Sin embargo, casi toda la información hace referencia a la compra de lentes o espejos terminados y listos para usarse, más no de la construcción de dichos elementos.

*Para mí fue una sorpresa cuando descubrí que el profesor Guillermo A. Del Moral, a quien había conocido apenas unas semanas antes, tiene una gran experiencia en el tallado de lentes y espejos, y en general en la construcción de telescopios. Lo que me llevó a pedir su ayuda y orientación en la construcción de un telescopio.*

Algo de suma importancia en la construcción de un telescopio es la planeación. Por lo que es importante que comencemos por la elección de las características de un telescopio y con base en ello construyamos un plan de acción previo a comenzar la construcción

**Características ópticas del telescopio**

### 1) Tipos de telescopios

Uno de los factores más importantes a tomar en cuenta es el tipo de telescopio que pretendemos construir, pues de ello dependerá la cantidad de objetos que podremos ver en el cielo nocturno.

Los dos tipos de telescopios más populares entre los constructores de telescopios aficionados son los reflectores y refractores. En los telescopios refractores la óptica está constituida por el objetivo, que es una lente convergente que se encarga de concentrar los rayos de luz en el ocular y el ocular, mientras que en los telescopios reflectores es el espejo primario convergente, quien tiene la función de concentrar la luz, y que además va acompañado de un espejo secundario plano, que se encarga de desviar los rayos de luz para que lleguen al ocular de manera perpendicular al tubo del telescopio.

Ilustración 14. Telescopio refractor (izquierda) y reflector (derecha).

### 2) Relación focal, distancia focal y diámetro de apertura.

La capacidad de un telescopio puede ser calculada conociendo dos valores, conocidos como **diámetro de apertura (D)** y **distancia focal (F).** El diámetro de apertura es el diámetro del objetivo en el caso de los refractores y del espejo primario en el caso de los reflectores. La distancia focal es la distancia que recorre la luz desde que atraviesa el objetivo o se refleja en el espejo primario, hasta llegar al ocular. La distancia focal es aproximadamente igual al largo del tubo del telescopio.

La manera en que se relacionan la distancia focal y el diámetro de apertura es a través de la **relación focal (f),** que se obtiene al dividir la distancia focal (F) entre el diámetro de apertura (D), considerando las mismas unidades.

$$f=F/D \qquad 2.1$$

El número f tiene una relación inversa con la luminosidad que tiene un telescopio, y por ende es recomendable que f no sea demasiado grande. Un telescopio con una f mayor será menos luminoso que un telescopio cuya f sea menor.

Las relaciones focales más comunes en los telescopios de los astrónomos aficionados van desde f=5 hasta f=10. Evidentemente es posible encontrar telescopios con una f mayor o menor, aunque es algo poco común.

Un telescopio con una mayor distancia focal permitirá obtener un mayor número de aumentos que uno con una distancia focal más corta, esto se debe a que la cantidad de aumentos que puede ofrecer un telescopio está dada por la ecuación siguiente, donde F'' es la distancia focal del ocular y F la distancia focal del espejo primario o del objetivo.

$$a=F/F'' \qquad 2.2$$

A simple vista podría parecer tentador incrementar la distancia focal del telescopio, de tal manera que podamos obtener un mayor número de aumentos, sin embargo, al aumentar la distancia focal, también vamos aumentando la relación focal, y por ende reduciendo la luminosidad de nuestro telescopio, lo que no permitirá que observemos de manera adecuada objetos tenues en el cielo

Lo mejor es conservar una relación focal adecuada para el tipo de observación que deseemos hacer. Un telescopio f5 es óptimo para la observación de objetos de cielo profundo, como lo son las nebulosas, galaxias, cúmulos y otros más. Mientras que un telescopio f10 nos permitirá ver de mejor manera y con mayor aumento objetos luminosos como lo son los planetas o los cráteres de la Luna. Para quienes desean observar tanto objetos luminosos como objetos más tenues y sólo tienen la posibilidad de construir o adquirir un único telescopio, lo más recomendable suele ser un telescopio con una relación focal f8, que permitirá disfrutar de una mayor gama de objetos durante la observación.


Ilustración 15. Telescopio con una relación focal grande.


Ilustración 16. Telescopio con una relación focal pequeña.

### 3) Espejo primario y secundario.

El espejo primario y secundario son sin duda los elementos más importantes en la óptica de un telescopio reflector. Como lo mencionamos anteriormente, el espejo primario tiene la función de hacer converger los rayos, mientras que el telescopio secundario refleja la luz hacia el ocular que está colocado de manera perpendicular al tubo del telescopio.

El espejo primario es un espejo convergente cuya curvatura va en relación inversa con la distancia focal del telescopio, usualmente es de vidrio con una película delgada de aluminio o en algunos casos de plata. Los diámetros son muy variados, dependiendo de las posibilidades o necesidades de cada persona, y las distancias focales suelen ser más comunes entre los 350 mm y los 1500 mm.

El espejo secundario es un espejo plano de forma elíptica, que suele ser, al igual que el primario, construido con cristal y recubierto con una película delgada metálica que permita una óptima reflexión.

Ambos espejos pueden ser adquiridos en centros especializados en óptica como lo son el Centro de Investigación en Óptica (CIO) en Guanajuato o el Instituto

Nacional de Astronomía, Óptica y Electrónica (INAOE) en Puebla. Aunque también se pueden adquirir a través de sitios de venta en internet, lo cual es recomendable únicamente si se tiene conocimiento del centro donde fueron construidos los espejos y las normas de calidad que se tienen en dicho lugar.

Otra manera de obtener los espejos es adquiriendo vidrio cortado de manera circular y aplicar el proceso de tallado y pulido, para posteriormente cubrir el espejo con una película metálica. Este proceso se explicará con detalle más adelante.

Ilustración 17. Espejos primarios y secundarios.

### 4) Ocular y portaocular.

Los oculares son el segundo elemento óptico del telescopio implicado en el aumento de las imágenes. Suelen ser lentes colocados sobre una estructura tubular metálica y en algunos casos con recubrimientos plásticos para hacer más cómoda la observación.

El portaocular es una estructura sobre la cual se pueden montar e intercambiar los oculares de un telescopio, y que además tiene la cualidad de poder aumentar o reducir la distancia a la que está colocado el ocular, para permitir un enfoque más adecuado.

Ambos se pueden construir de diversas maneras, aunque lo más adecuado suele ser adquirirlos en un centro especializado o en tiendas de instrumentos para la observación astronómica.


Ilustración 18. Diferentes tipos de oculares.

## 5) Tubo del telescopio y celdas

El tubo del telescopio es la estructura sobre la que se montarán todos los elementos ópticos del telescopio y se puede construir de muchos materiales. Uno de los materiales más populares entre los aficionados es el PVC, del cual es fácil conseguir tubos de diversos diámetros en ferreterías, cortados a la medida deseada y a un bajo costo. Otro material no tan popular, pero muy eficiente es el aluminio, el cual, con la maquinaria adecuada, puede usarse para formar un tubo con diámetro y longitud específicos.

El telescopio posee dos celdas para colocar los espejos, una de ellas es la celda del primario, que tiene la función de soportar el espejo primario y generalmente tiene una estructura que permite hacer pequeñas variaciones en la inclinación del espejo, para que de esta manera pueda ser más fácil calibrar el equipo.

La otra celda es la del secundario, que se coloca en la parte del tubo contraria a la celda del secundario. Está generalmente unida por varillas delgadas al tubo, y posee las dimensiones apenas necesarias para poder colocar el espejo secundario. de esta manera se permite el paso a la mayor cantidad de rayos de luz.

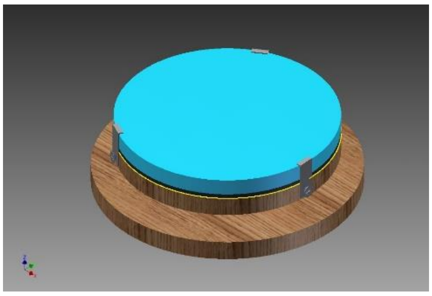


Ilustración 19. Celda del primario.

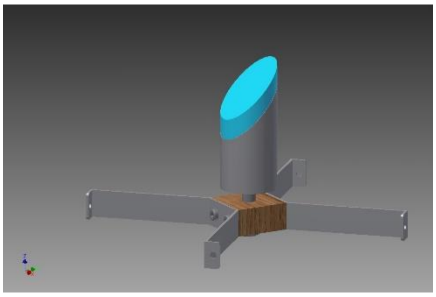


Ilustración 20. Celda del secundario

**5) Montura del telescopio.**

La montura es la estructura sobre la que se colocará el telescopio armado con todos sus elementos, y que permite girar al mismo, para poder apuntar a cualquier punto del cielo con facilidad.

Los tres tipos de monturas más populares son la azimutal, la Dobson y la ecuatorial alemana.

La montura azimutal tiene giro en la dirección horizontal y en la dirección vertical, de los cuales cada uno actúa de manera independiente. Suelen ser mucho más económicas de las monturas ecuatoriales y también más fáciles de usar, por lo que es común encontrarlas incluidas en la compra de la mayoría de telescopios para aficionados.

La montura Dobson es una montura que tiene el mismo comportamiento que la montura azimutal, pero suele ser más robusta y fácil de construir, por lo que es adecuada para los que se están iniciando en el mundo de la astronomía.

La montura ecuatorial es la más compleja y la más difícil de conseguir. Sus precios son generalmente mucho más elevados que los de una montura Dobson o una montura azimutal, sin embargo, son las más adecuadas para la astrofotografía y observación en general, debido a que nos permiten seguir el movimiento de las estrellas con un sólo movimiento, que es el movimiento de ascensión recta.

Ilustración 21. Montura ecuatorial (izquierda) y montura Dobson (derecha).

## 6) Automatización de un telescopio

Con la finalidad de dar seguimiento a las estrellas en su movimiento aparente causado por la rotación de la Tierra, los astrónomos se han encontrado con la necesidad de crear nuevos sistemas de seguimiento, como lo son las monturas ecuatoriales mencionadas anteriormente. Sin embargo, los movimientos humanos suelen ser imprecisos, por lo que se suele agregar un mecanismo que permita a la montura realizar estos movimientos de manera automática y con una precisión que difícilmente podría lograrse operando de manera manual el telescopio.

Este sistema está conformado por motores, un sistema de transmisión mecánico y un controlador para los motores.

Los motores que se usan comúnmente son motores de corriente directa; más específicamente motores de pasos. Éstos permiten un movimiento preciso y con un gran torque, lo que permite mover fácilmente telescopios de gran tamaño.

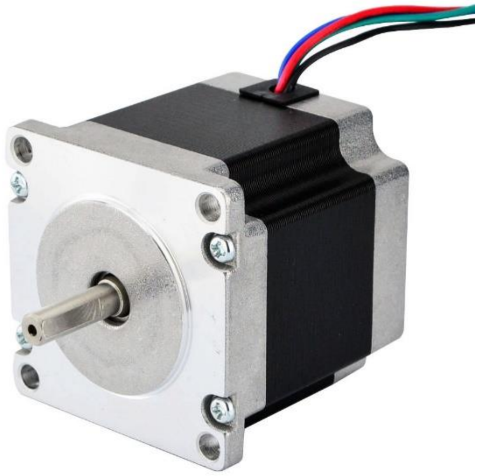


Ilustración 22. Motor a pasos.

El sistema de transmisión puede estar conformado por bandas, poleas, engranajes, tornillos sin fin u otros elementos mecánicos que se acomoden a las necesidades de cada equipo. Este nos permite regular de manera mecánica la velocidad, el torque e incluso la dirección del movimiento.

El controlador del motor nos permite indicar al motor cuántos pasos tiene que dar por intervalo de tiempo. Anteriormente se solían usar sistemas sumamente complejos para controlar los motores a pasos, sin embargo, los microcontroladores que cada vez se han vuelto más populares, nos permiten controlar motores con circuitos simples y sumamente efectivos en cuanto a consumo energético.

## Tallado del espejo primario.

Anteriormente se habló de la importancia y función del espejo primario en un telescopio reflector. Ahora hablaremos de su fabricación artesanal.

Para la fabricación de un espejo primario se deben considerar los siguientes factores:

- **Forma del espejo:** El espejo primario debe ser un espejo convergente, lo que implica que será un espejo cóncavo. Existen dos formas de espejos cóncavos, y son los parabólicos y los esféricos. Los parabólicos suelen ser los más adecuados para astronomía. Sin embargo, el proceso de tallado de los espejos esféricos es más sencillo, por lo que éstos suelen ser más utilizados, pese a que podrían presentar un defecto óptico llamado "aberración esférica".

- **Diámetro:** El diámetro del telescopio no está dado por el diámetro del tubo sobre el que se monten los componentes ópticos, sino por el diámetro de su espejo primario. Por ello es importante considerar la ecuación 2.1 al momento de elegir el diámetro del espejo.

- **Distancia focal:** La distancia focal del espejo (y por ende la del telescopio) estará dada por la curvatura que tenga éste mismo, de la siguiente manera:

  $$R=2F$$

  Donde R es el radio de curvatura del telescopio. Por lo anterior podemos ver que mientras menor sea la distancia focal del telescopio, el radio de curvatura reducirá de manera tal que la curva será más pronunciada.

Una vez que se tiene el conocimiento de las características con las cuales se planea fabricar el espejo se procederá al proceso de tallado, para lo cual podemos recurrir al uso de manuales técnicos, como lo son algunos de los libros que se presentarán en las referencias. Los cuales nos podrán dar un panorama más amplio sobre la fabricación de lentes y espejos para telescopios.

Ilustración 23. Tallado del espejo primario.

## Un fascinante viaje a las estrellas.

Un telescopio es un instrumento fascinante, que nos puede mostrar un universo lleno de objetos maravillosos, y su construcción nos puede acercar a una mejor comprensión de su funcionamiento. Sin duda ver las estrellas es fascinante, pero comprender mejor aquel telescopio que nos da la oportunidad de ver objetos que se encuentran a millones de kilómetros de distancia, desde nuestro hogar, es una experiencia inigualable.

El deseo de observar más allá de lo que nuestros ojos permiten ha acompañado a los humanos desde hace miles de años y ha llevado a todos aquellos que tuvieron una curiosidad excepcional, a sorprendentes descubrimientos. Hoy más que nunca tenemos la oportunidad de observar objetos en el universo cuya existencia era completamente desconocida hasta hace algunos años. Es por esto que debemos mantener los ojos abiertos y mirar al cielo más a menudo, porque, aunque todo parece estar descubierto, aún hay millones de cosas por descubrir en el universo detrás del telescopio.

## Bibliografía

Alfonso del Moral, G. (n.d.). *Construcción de Telescopios.* México.

Brown, S. (1975). *All About Telescopes.* New Jersey: Edmund Scientific Co.

Malacara, D. (1988). *Telescopios y Estrellas.* México: Fondo de Cultura Económica.

### Fuentes de las ilustraciones.

https://cdn.pixabay.com/photo/2014/12/18/15/07/sky-572536_960_720.png
https://cdn.pixabay.com/photo/2016/03/31/18/24/astronomy-1294337_960_720.png
https://www.madridiario.es/fotos/1/descarga.png
https://procular.com.au/wp-content/uploads/2018/03/refractor-vs-reflector-teslecopes.jpg
https://www.amaina.com/2174-large_default/telescopio-astronomico-celestron-powerseeker-127-eq.jpg
https://www.amaina.com/telescopios-reflectores/1897-telescopio-astronomico-celestron-powerseeker-114-eq.html
https://2.bp.blogspot.com/_4W_JRbA-QYc/R62pqXxhQGI/AAAAAAAABzQ/2IRmybf-ze0/s320/mirror_telescope1.jpg
https://es.wikipedia.org/wiki/Ocular
http://eldiariodeuntelescopio.blogspot.com/2012/05/soporte-del-espejo-secundario.html
https://electronilab.co/wp-content/uploads/2013/08/Motor-Paso-A-Paso-Nema-23-178.5-oz.in-200-Pasos-Electronilab-1.jpg

# Pitágoras, sin palabras

Abelardo Santaella Quintas[41]
asantaellaq@ipn.mx, abelardo.santaella@gmail.com

**Enseñanza**

En esta sección se encuentran artículos escritos por alumnos de nivel superior, egresados, y por profesores comprometidos con su práctica docente

## Resumen

El uso de recursos didácticos manipulativos en el proceso de enseñanza aprendizaje, son una opción, que permite, se diseñen actividades lúdicas que plantean retos cognitivos a docentes y estudiantes, además de propiciar el trabajo colaborativo. Permiten trabajar contenidos matemáticos utilizando distintos escenarios. La manipulación permite explorar diversas soluciones a un mismo problema (se favorece la flexibilidad de pensamiento), esto facilita el uso de la modelación matemática (representación pictórica) y por ende la construcción de soluciones en forma abstracta. Al tener la posibilidad de trabajar sobre distintos escenarios se propician los procesos que conducen de la conceptualización al concepto.

## Objetivo

A través de las actividades sugeridas, el estudiante estimula la capacidad de utilizar las matemáticas como un instrumento para reconocer, plantear y resolver problemas.

## Marco teórico

La enseñanza de las matemáticas tiene como propósito que los estudiantes refuercen las nociones y conceptos útiles para comprender y describir su entorno.

El reforzar los conocimientos y las herramientas les permiten asimismo resolver problemas de la vida real[42]. Además, los conocimientos, las habilidades y el razonamiento son necesarios para ahondar en el estudio de matemáticas más complejas, así como para acceder al conocimiento de otras disciplinas como, por ejemplo, la física, la biología, la economía, etcétera.

Lo anterior nos indica la constante necesidad de fortalecer nuestros conocimientos matemáticos, tanto para profesionistas y especialistas como para el ciudadano común. Nuestros estudiantes de los diferentes niveles educativos forman parte de estos grupos donde las matemáticas resultan indispensables dentro de su formación académica.

---

[41] Escuela Superior de Física y Matemáticas, IPN

[42] Lo anterior es posible, al propiciar un ambiente en el que los estudiantes formulen y validen conjeturas, se planteen preguntas y adquieran las herramientas y conocimientos necesarios en matemáticas.

Las actividades lúdicas, propician la interrelación de los estudiantes con el docente, sus compañeros y el medio, favoreciendo su evolución en lo individual y en lo social.

Las matemáticas son una herramienta útil, puesto que propician el pensamiento deductivo que lleva al análisis de situaciones nuevas, aplicando los conocimientos adquiridos.

**Desarrollo**

Hay un sinnúmero de problemas básicos en matemáticas que involucran aspectos aritméticos, geométricos y algebraicos. Algunos de estos problemas requieren para su solución de un planteamiento elemental[43], en estas se pueden utilizar técnicas de conteo, cuerpos geométricos o expresiones algebraicas, y en algunos casos, pueden estar inmersos simultáneamente todos estos aspectos.

Es uso de los cuadriláteros incluidos en el material didáctico de la Caja Pitagórica, permite a los estudiantes de los distintos niveles educativos abordar de forma lúdica, el que quizá sea el resultado matemático más conocido. ¿Cuántas veces en nuestra vida diaria hemos oído mencionar la siguiente frase: “Pitágoras no se equivocó”, sin referirnos de manera explícita al resultado como tal? El teorema lleva su nombre porque la tradición es unánime en atribuir a Pitágoras el descubrimiento independiente del teorema del triángulo rectángulo que ahora lleva universalmente su nombre, y que enuncia lo siguiente: el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Aunque se sabe que este teorema lo conocieron los babilonios de la época de Hammurabi, más de mil años antes, la primera demostración general del teorema pudo haber sido dada por Pitágoras. Se han hecho muchas conjeturas respecto a la demostración que Pitágoras, pudo haber dado, y se considera en general que posiblemente fue un tipo de disección que utilizó en su demostración. Cabe mencionar, además, que este quizá haya sido el primer resultado en matemáticas que posee demostración.

Una de las motivaciones para estudiar el teorema de Pitágoras en los distintos niveles educativos, descansa en su utilidad en actividades cotidianas, en las aplicaciones indirectas de dicho teorema. Para ello describamos la siguiente situación (los demás casos se adaptan a situaciones como la que se plantea): coloquemos a un niño que ya camina sin dificultad, en la esquina de una habitación rectangular, y en el lado diametralmente opuesto, un regalo (sobre la diagonal del rectángulo). Le pedimos al menor que vaya por el regalo. Si repetimos varias veces este experimento, podremos observar que la mayoría de las veces la trayectoria que aproximadamente seguirá (salvo casos excepcionales) es la que describe la diagonal. De forma inconsciente el menor hace uso, de manera implícita, de una de las consecuencias del teorema de Pitágoras, a saber, la que expresa: “la distancia más corta entre dos puntos en un plano es una línea recta”. Al reproducir la situación con otros niños y, más aún, con otro tipo de seres vivos. Por ejemplo, si utilizamos a un perro o a un gato y colocamos alimento, según sea el caso, obtendríamos una conclusión

[43] Es importante mencionar que “elemental” no significa “fácil”.

similar sobre la trayectoria por donde se desplazarían. Nos preguntamos entonces de manera natural: ¿conocen estos animales el teorema de Pitágoras? Salvo que alguien demuestre lo contrario, nuestra respuesta es: no. Podríamos decir que la decisión de moverse a lo largo de esa trayectoria está ligada con la experiencia adquirida de manera empírica en cuanto a cuestiones que involucran el tiempo que requerimos para desplazarnos de un lugar a otro[44]. Por lo tanto, tomar esa trayectoria o camino involucra un problema de optimización. Podemos entonces concluir que el teorema de Pitágoras está relacionado con, al menos, una situación de carácter real que involucra a la distancia[45] (aplicaciones en geometría, física, etcétera.) la cual puede formularse utilizando una expresión matemática.

Aclaremos que los alcances del teorema de Pitágoras no se limitan a una aplicación como la mencionada en el párrafo anterior. Sus alcances y las aplicaciones que refieren al mismo son tales que, introducirlo de manera más lúdica, permite al estudiante facilitar el uso de conceptos y aspectos matemáticos relacionados con el mismo.

Los cuadriláteros que se utilizan en la descripción de las siguientes actividades, nos permiten trabajar, de manera lúdica con el teorema. Esto es posible ya que éste se expone de manera geométrica.

La implementación de las siguientes actividades, pueden modificarse a criterio del docente, según lo considere conveniente.

**Demostrando Pitágoras**

Para efectuar la actividad se utilizan las siguientes piezas:

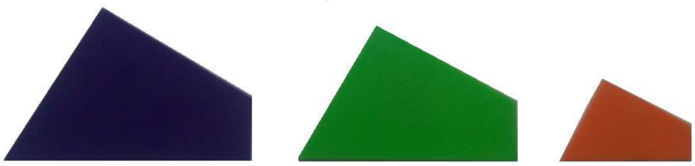


Figura 1. Piezas que se utilizan para la actividad Demostrando Pitágoras.

Se utilizan veinticuatro cuadriláteros (ocho de cada tamaño), se indica que los separen en grupos del mismo tamaño (o color, perímetro, área, longitud de un lado común, proporcionalidad). Al contabilizar el número de piezas de cada uno de estos grupos, independientemente del criterio de selección solicitado. Cada grupo debe conformarse de ocho piezas iguales.

Deben concluir que, en ocasiones, existen objetos que pueden elegirse con diversos criterios y obtener aun así los mismos resultados (poseen más de una característica común). Se indica que deben utilizar cuatro cuadriláteros idénticos y a partir de estos se pueden armar sin superponer piezas, dos tipos de

---

[44] Aplicación del concepto distancia-tiempo.
[45] Únicamente se considera la distancia en el plano cartesiano.

cuadrados distintos: uno sin hueco y otro con hueco, esto se ilustra en la figura siguiente.

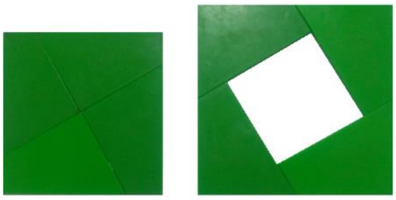


Figura 2. Cuadrado sin hueco y con hueco.

Mencione que, aunque los cuadrados son de diferente tamaño y las áreas que abarcan son distintas, así como su perímetro, no lo es el área que cubren. Esta última es la misma. Solicite justifiquen lo anteriormente expuesto.

Considerando el nivel en el cual esta implementando la actividad, puede considerar realizar preguntan que permitan la participación de los estudiantes, se sugieren, por ejemplo: ¿Cuál es el área que abarca cada cuadrado? ¿Cuál es el perímetro de cada figura? ¿Cuál es el perímetro del cuadrado con hueco y su área? ¿Qué proporción hay entre las figuras?

Indique subdividan en dos colecciones. Una de ellas debe agrupar a los cuadrados con hueco y la otra a los cuadrados sin hueco. Solicite que ordenen las colecciones por tamaño, utilizando cualquiera de los siguientes criterios: de menor a mayor o de mayor a menor.

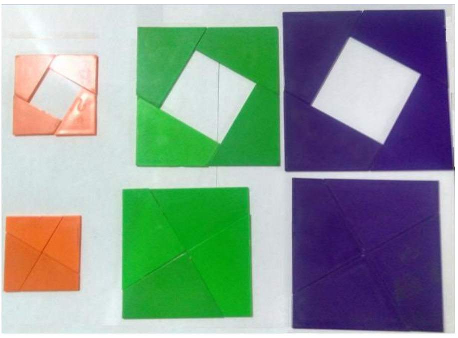


Figura 3. Cuadrados sin hueco y con hueco, ordenados de menor a mayor.

Realice las siguientes preguntas: ¿En ambos grupos, hay piezas que sean del mismo tamaño (una debe ser hueca y la otra no)? ¿Equivalentemente, abarcan las mismas áreas (no que cubran)? Como es afirmativo esto, solicite las separen del resto del grupo. Pregunte: del grupo de las figuras no huecas ¿una de éstas puede introducirse en la pieza hueca y cubrir el hueco? Deben separar la pieza y completar, este proceso se describe en la figura siguiente.

Figura 4. Cuadrados del mismo tamaño y que cubren la misma área.

Finalmente, solicite que, de la figura formada por los dos cuadrados, las separe y forme los dos cuadrados sin hueco y los ordene por tamaño, adjuntando el otro cuadrado en cuestión. Conduzca para que puedan concluir que, al agregar o sumar los dos primeros cuadrados, obtenemos al otro cuadrado (esto es con base al nivel educativo al cual se aplica la actividad). Concluya además que esta es la única combinación posible que satisface tal situación. Lo anterior, describe una demostración indirecta del teorema de Pitágoras.
Considere la siguiente variante de esta actividad. Solicite a los estudiantes que tomen cuatro piezas del mismo tamaño de cada grupo de los cuadriláteros, y construyan tres cuadrados de cada color sin hueco (debe indicar a los alumnos que es posible construir otro cuadrado, pero hueco). Una vez obtenidos estos, que los ordenen por tamaño, por ejemplo, de menor a mayor. Pida que tomen los dos cuadrados de menor tamaño y, a partir de éstos, construyan un cuadrado. Aquí se desarrollan las habilidades como las que se refieren a ensambles y desensambles. Lo anterior permite al estudiante poner a prueba las diversas combinaciones entre las piezas. En este punto, el color de las piezas ya no implica una restricción en la construcción, lo cual puede ser un obstáculo para el objetivo del estudiante (sin embargo, aquí es importante puntualizar que se estimula el razonamiento ya que, a partir de ciertas condiciones, debemos determinar la viabilidad o imposibilidad de lograr el objetivo). Una vez logrado el propósito, se solicita al estudiante coloque una de las piezas sobre la otra. Si el docente, desea facilitar el procedimiento, puede efectuar toda esta actividad, solicitando al estudiante que mire con atención todo el procedimiento (armado y desarmado), ya que él realizará el mismo posteriormente.

Solicite a los estudiantes que comenten acerca de la actividad desarrollada (estamos estimulando su proceso de razonamiento, el cual tendrá como resultado la obtención de una conclusión[46]).

Los estudiantes, obtendrán una demostración formal del teorema de Pitágoras, que no requieren de ningún procedimiento de cálculo numérico, sino que la demostración es completamente geométrica. Más aún, estará reproduciendo una de las posibles demostraciones obtenidas por Pitágoras.

Adicionalmente, puede solicitar que calculen el área de cada uno de los cuadrados, sumen y comparen las mismas.

[46] Una posible respuesta es que, a partir de dos cuadrados, podemos armar otro cuadrado, o que la suma del área de dos cuadrados genera otro cuadrado, etcétera.

## El recíproco de Pitágoras

Conduzca a los estudiantes a realizar la prueba del recíproco del teorema de Pitágoras[47]. Se utiliza los cuadrados construidos en la actividad previa. Solicite a los estudiantes que utilicen uno de los lados de cada uno de los tres cuadrados y que, a partir de ellos, construya un triángulo. Utilice una escuadra, e indique que la escuadra forma la figura plana del menor número de lados rectos, siendo esta la de un triángulo, pero con la particularidad de que este triángulo puede colocarse de tal forma que un par de sus lados pueden estar en contacto, al mismo tiempo, uno con el piso y el otro con la pared. Esta característica permite llamar, de manera particular a este triángulo: triángulo rectángulo, es decir, posee un ángulo recto. Colocando la escuadra sobre el triángulo construido, uno concluye que el triángulo formado por los cuadrados que utilizamos es la actividad anterior forman un triángulo rectángulo. Puede utilizar el tangram para verificar lo anterior en el caso de un triángulo isósceles.

La conclusión es que todo triángulo rectángulo satisface la condición del teorema de Pitágoras, y que todo triángulo que satisface el teorema de Pitágoras es un triángulo rectángulo.

Figura 5. Teorema de Pitágoras.

## Aprendizajes esperados

El planteamiento central en cuanto a la metodología didáctica que sustentan los programas para la educación básica, consiste en llevar a las aulas actividades de estudio que despierten el interés de los estudiantes y los inviten a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver los problemas y a formular argumentos que validen los resultados.

Uno de los objetivos de las actividades anteriores es apoyar al docente en las siguientes cuatro competencias: el planteamiento y la resolución de problemas, la argumentación, la comunicación y el manejo de técnicas.

[47] Nos referimos al que el teorema tiene dos implicaciones: una necesidad y una suficiencia.

## Referencias

Jesús Alarcón Bortolussi, Elisa Bonilla Rius, Rocío Nava Álvarez, Teresa Rojano Cevallos, Ricardo Quintero. (1994). Libro para el maestro, Educación Secundaria. México: Secretaría de Educación Pública.

Lynn Arthur Stenn. (2008). La enseñanza agradable de las matemáticas. México: Limusa.

Édouard Lucas. (2007). Recreaciones matemáticas. España: Libros Ediciones Nivola.

Eduardo Zárate Salas. (2000). Aprende matemáticas jugando. México: UPN.

# Cuadrado mágico

Abelardo Santaella Quintas[48]
asantaellaq@ipn.mx, abelardo.santaella@gmail.com

## Resumen

Una de las actividades recreativas y de gran importancia para los estudiantes corresponden al, ya conocido cuadrado mágico. Ellos pueden, considerar este pasatiempo ya muy trabajado, sin embargo, podrán percatarse que sigue siendo muy flexible, ya que permite no sólo el uso de números naturales, sino además de números enteros, racionales; estos últimos expresados como cociente de números enteros o su representación en forma decimal, ya sea finita o infinita periódica. De esta manera se refuerzan las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y división, así como los conceptos de múltiplos, sucesiones, etcétera.

## Objetivo

A través de las actividades sugeridas el estudiante, estimula el cálculo mental y aplica las operaciones básicas de suma, resta, división y multiplicación, además de reconocer, plantear y resolver problemas.

## Marco teórico

La enseñanza de las matemáticas tiene como propósito que los estudiantes refuercen las nociones y conceptos útiles para comprender y describir su entorno.

El reforzar los conocimientos y las herramientas les permiten asimismo resolver problemas de la vida real[49]. Además, los conocimientos, las habilidades y el razonamiento son necesarios para ahondar en el estudio de matemáticas más complejas, así como para acceder al conocimiento de otras disciplinas como, por ejemplo, la física, la biología, la economía, etcétera.

Lo anterior nos indica la constante necesidad de fortalecer nuestros conocimientos matemáticos, tanto para profesionistas y especialistas como para el ciudadano común. Nuestros estudiantes de los diferentes niveles educativos forman parte de estos grupos donde las matemáticas resultan indispensables dentro de su formación académica.

Las actividades lúdicas, propician la interrelación de los estudiantes con el docente, sus compañeros y el medio, favoreciendo su evolución en lo individual y en lo social.

---

[48] Escuela Superior de Física y Matemáticas, IPN
[49] Lo anterior es posible, al propiciar un ambiente en el que los estudiantes formulen y validen conjeturas, se planteen preguntas y adquieran las herramientas y conocimientos necesarios en matemáticas.

Las matemáticas son una herramienta útil, puesto que propician el pensamiento deductivo que lleva al análisis de situaciones nuevas, aplicando los conocimientos adquiridos.

**Desarrollo**

En el famoso cuadro *Melancolía*, del pintor alemán Albrecht Dürer, aparece un cuadrado mágico. Un cuadrado mágico está constituido por números dispuestos de tal forma que, al ser sumados en renglones, columnas o diagonales, dan el mismo resultado. En la siguiente figura se ilustra el grabado donde aparece el cuadrado mágico plasmado por el artista alemán.

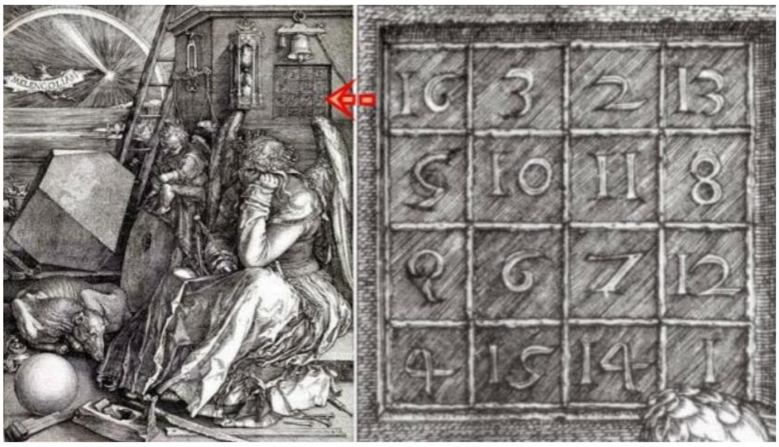



Figura 1. Melancolía del pintor alemán Albrecht Dürer.

Este cuadro satisface, además, que la suma de las cantidades localizadas en las casillas centrales es 34. Dürer logró, asimismo, introducir en las columnas centrales del renglón localizado en la parte inferior el año 1514 (cuando realizó el cuadro). Grandes matemáticos, como Euler y Cayley, descubrieron que dichos cuadrados eran entretenidos e interesantes para ser estudiados. El propio Benjamín Franklin, creó uno conocido como el cuadrado mágico perfecto (más adelante se ilustra). Por cierto, Euler construyo un cuadrado mágico para un caballo (ilustrado más adelante).

Trabajar con cuadrados mágicos permite al estudiante reforzar los métodos de conteo. Involucra, además, aspectos que conciernen a la manipulación de objetos de cierta naturaleza (nociones de conjuntos), siendo en este caso números y la combinación de los mismos, de tal forma que se obtenga lo deseado.

Este es uno de los juegos matemáticos más utilizados por nuestros docentes para involucrar a los estudiantes en la operación básica de la suma. A lo largo de la discusión, podremos concluir que pueden utilizarse también en su solución las operaciones de resta, multiplicación y división. Uno puede encontrar en la literatura un sinfín de información de este interesante juego que tiene como objetivo familiarizar al lector con algunas técnicas para la resolución de ciertos tipos de cuadrados mágicos. Estamos interesados en incluir algunos procedimientos que permitan al docente darle un mayor alcance a la utilidad del cuadrado mágico.

**Cuadrado mágico, el juego clásico**

Describamos el problema más clásico del cuadrado mágico, el cual corresponde a la siguiente situación: considere los números del 1 al 9, utilizamos un arreglo cuadrangular de tamaño $3 \times 3$, como se muestra en la figura. La intención es colocar los números de tal forma que, al realizar la suma en las direcciones horizontal (renglones), perpendicular (columnas) y en ambas diagonales el resultado sea $15$. Se puede verificar que una solución es:

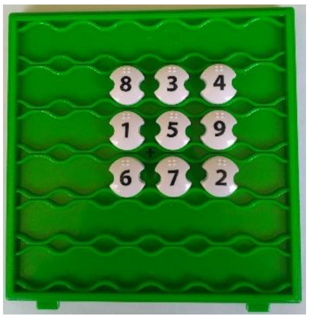



Figura 2. Cuadrado mágico

Observación: más adelante, podemos garantizar que esta solución es única, salvo rotaciones y reflexiones.

La pregunta natural que surge es ¿cuántos cuadrados mágicos hay? En caso de considerar que los valores utilizados sean números reales, la respuesta es: una infinidad. El siguiente método permite hallar tales cuadrados mágicos.

A continuación discutimos un método de solución general para el cuadrado mágico de tamaño $3 \times 3$, pero hacemos hincapié en que esta discusión es exclusiva para el docente, con la intención de que puede construir cualquier cuadrado mágico de dicho tamaño. El método que utilizaremos hace uso de la aplicación de sistemas de ecuaciones lineales (tema que se aborda en secundaria, inicialmente en un sistema de una ecuación en una incógnita, para finalmente estudiar un sistema de dos ecuaciones en dos incógnitas, además se abordan algunos métodos de solución) y del método de eliminación que se aplica en la solución de un sistema de dos ecuaciones en dos incógnitas. Es método de eliminación puede generalizarse para la resolución de sistemas de $n$ ecuaciones lineales en $m$ incógnitas. Este método generalizado recibe el nombre de método de eliminación gaussiana. Es sin duda, el más poderoso método para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Además, su implementación computacional es la más eficiente.

Consideremos el cuadrado mágico de $3 \times 3$, pero supongamos que deseamos encontrar una colección de nueve números consecutivos, de tal forma que cumpla la condición estipulada para el cuadrado mágico (la diferencia o distancia entre dos consecutivos siempre es $1$) y se satisfaga además que su suma sea $n$, tenemos la siguiente situación:

Sean $a, b, c, d, e, r, g, h, i$ los números reales (no se específica su orden) distribuidos como lo muestra la siguiente figura:

| | | |
|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ |
| $d$ | $e$ | $f$ |
| $g$ | $h$ | $i$ |

Más aún, tales números hacen del cuadrado anterior un cuadrado mágico para el valor $n$. La situación planteada se describe matemáticamente por el siguiente sistema de ecuaciones lineales (este planteamiento en un modelo matemático lineal):

$$a + b + c = n$$

$$d + e + f = n$$

$$g + h + i = n$$

$$a + d + g = n$$

$$b + e + h = n$$

$$c + f + i = n$$

$$a + e + i = n$$

$$c + e + g = n$$

Obtenemos así un sistema de $8$ ecuaciones en $9$ incógnitas. La teoría referida a este tipo particular de sistemas de ecuaciones, es decir con estas características, garantiza que el sistema admite una infinidad de soluciones. De esto concluimos entonces que hay una infinidad de cuadrados mágicos; aplicando el método de eliminación gaussiana a la matriz que describe el sistema y llevando la solución a la forma escalonada reducida, obtenemos que la solución del mismo ésta descrita por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$a + i = \frac{2}{3}n$$

$$b + h = \frac{2}{3}n$$

$$c - b - i = -\frac{1}{3}n$$

$$f + h + 2i = \frac{4}{3}n$$

$$e = \frac{1}{3}n$$

$$d - b - 2i = -\frac{2}{3}n$$

$$g + b + \ i = \ n$$

Observamos que la solución general involucra, salvo la solución de la variable $e$, dos valores independientes, a saber $h$ e $i$. Asignando a $n$ el valor de $15$ y tomando $h = 7$ e $i = 2$, hallamos la solución descrita para el cuadrado mágico, que se muestra al inicio del documento. Podemos además tomar los valores de $h = 1$ e $i = 6$, y mantenemos $n = 15$, obtenemos una segunda solución, la cual resulta ser equivalente a la obtenida con los valores anteriormente asignados a $h$ e $i$. Éstas dos sustituciones nos permiten tener como espacio de solución para el cuadrado mágico los números del $1$ al $9$, además las sustituciones $h = 9, i = 4$; $h = 3, i = 8$; $h = 7, i = 6; h = 1, i = 8$; $h = 3, i = 4$; y mantenemos $n = 15$ el espacio de solución son los números del $1$ al $9$, es decir, si nosotros asignamos valores distintos a $h$ e $i$ de éstos y mantenemos el valor de $n = 15$, obtendremos otras soluciones, pero con la diferencia de que ya no se tiene como espacio de solución de éste a los números del $1$ al $9$.

Estamos ahora en la posibilidad de justificar la siguiente pregunta ¿por qué la suma debe ser $15$? Sumemos las tres primeras ecuaciones del sistema, obtenemos

$$a + b + c + d + e + f + g + \ h + \ i = 3n$$

Si los valores a tomar por las variables $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ deben ser uno y sólo uno de los elementos el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, entonces el lado izquierdo de la igualdad nos pide hallar la suma (no están ordenados, pero recordemos que la suma es conmutativa) de los primeros nueve números naturales. Un simple cálculo muestra que la suma obtenida es $45$. Luego de la ecuación anterior obtenemos que $n = 15$.

La solución del sistema permite implementar el siguiente procedimiento (que podemos aplicar a diversos ejercicios):

- Ordene la sucesión de los nueve números consecutivos en forma ascendente, es decir:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

- Subdivida los números en bloques de tres, de tal forma que la suma de cada bloque sea $15$. Obtenemos así los siguientes dos casos:

$$1 + 5 + 9 = 15 \qquad 3 + 5 + 7 = 15$$

$$2 + 6 + 7 = 15 \qquad 2 + 9 + 4 = 15$$

$$3 + 4 + 8 = 15 \qquad 1 + 6 + 8 = 15$$

Podemos además señalar que no hay otras combinaciones diferentes de las dos anteriores que satisfagan las condiciones pedidas. Estas combinaciones indican todo el espacio de soluciones para este caso. Tenemos que la quinta ecuación del sistema 3 nos indica que la combinación $1 + 5 + 9$ o $3 + 5 + 7$ debe colocarse en la segunda fila del cuadrado mágico. A partir de esto, obtenemos la solución y podemos observar que ambas son la misma (es única salvo rotaciones y reflexiones) y coinciden con la presentada al inicio del documento.

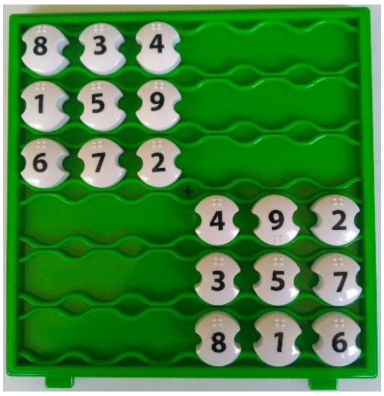



Figura 3. Soluciones del cuadrado mágico, caso $n = 15$

Podemos concluir además que si consideramos a $n = 15$ en el sistema de ecuaciones y a las variables $h$ e $i$ les asignamos cualesquiera otros valores, obtenemos diferentes soluciones para cada pareja de números que se den. Por ejemplo, si $h = 11$ e $i = 4$ puede verificarse que el cuadrado correspondiente es:

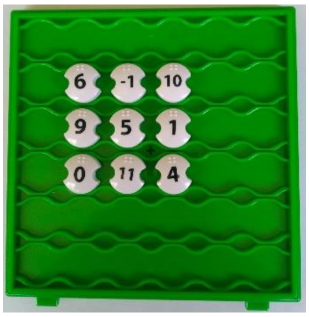



Figura 4. Solución del cuadrado mágico ($h = 11$ e $i = 4$)

Este ejemplo nos muestra que el espacio de soluciones de un cuadrado mágico no se restringe al conjunto de los números naturales. Este último cuadrado nos muestra el número $0$ (el cero, la identidad aditiva) y al $-1$ (el inverso aditivo del $1$).

## Aplicaciones

A continuación, analizaremos casos particulares que nos permitan trabajar con números reales. Con lo anteriormente discutido, el espacio de ejemplos es amplio.

Un sencillo planteamiento, basado en el análisis anterior nos permite concluir porque no es posible obtener un cuadrado mágico de tamaño $2 \times 2$ (se excluye en este y en todos los casos de cuadrados mágicos la solución llamada solución trivial, y se concluye que, en el caso del cuadrado de $2 \times 2$, la solución es la trivial y por eso no existe interés en estudiarlo; por ejemplo, para el caso del cuadrado mágico de $3 \times 3$, la solución trivial $n = 15$ corresponde a que todas las variables sean iguales a $5$).

Los ejemplos enlistados a continuación se exponen en forma gradual, con la intención de que los estudiantes se familiaricen con el cuadrado mágico. Agrego comentarios en cada uno ellos, para sugerir la aplicación de los mismos en estudiantes de un nivel determinado.

Ejemplo 1.

En este caso, el ejemplo puede aplicarse a los estudiantes de todos los niveles. Considere las siguientes fichas.

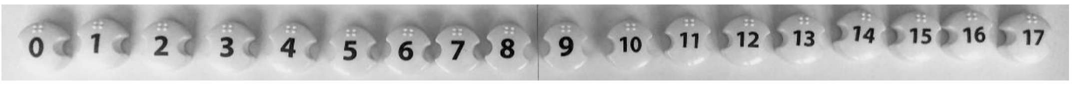



Figura 5. Fichas a utilizar para construcción de cuadrados mágicos

Solicite a los estudiantes que tomen los primeros nueve números naturales, una vez realizado esto, pídales que los ordenen en forma ascendente o descendente. En este punto aprenden a diferenciar los números entre sí y a establecer la relación de orden entre ellos, como lo muestra la siguiente figura:

Solicite que obtengan, de ser posible, la suma de los números; si no, basta con que los separa en grupos de tres fichas, de tal manera que al sumar cada bloque de éstos la suma sea $15$ (aplicación de cálculo mental). Después indique que coloque las fichas del bloque de izquierda a derecha o de derecha a izquierda (utilizamos las dos soluciones del cuadrado mágico). Luego, pídales que coloquen los bloques de arriba hacia abajo o viceversa (debemos indicarle un número en el bloque, para que lo tome como referencia y pueda efectuar lo que se le indica). Deben colocarlos en el cuadrado, respetando el orden considerado previamente, considerando todas las combinaciones de sumas que determinan al cuadrado mágico. En este punto, aplique cálculo mental. La siguiente figura ilustra una solución equivalente a la mostrada al inicio del documento.

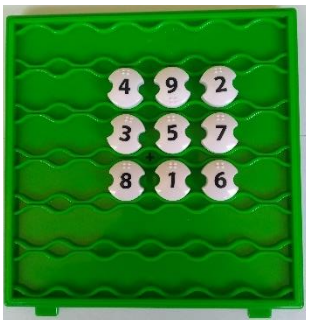


Figura 6. Solución del cuadrado mágico

En un estudiante de tercer grado de secundaria observa el uso del orden en una serie numérica, los conceptos de antecesor y sucesor, valor posicional y la construcción de una serie numérica (sucesión de los naturales).

Observación. Puede considerar la siguiente modificación: los dígitos asociados describen decenas, centenas, unidades de millar o decenas de millar, lo cual permite obtener un cuadrado mágico para decenas, centenas, unidades de millar o decenas de millar. En el primer caso, obtendríamos un cuadrado mágico cuya suma debe ser igual a $15$ decenas, equivalentemente $150$ unidades; en el caso de las centenas, obtendríamos $15$ centenas, equivalentemente $1500$ unidades, y así sucesivamente.

Se utiliza de forma natural la multiplicación de cantidades con números terminados en ceros.

Ejemplo 2

Solicite a los estudiantes que le proporcionen un número múltiplo de tres (o divisible entre tres) mayor que $15$ y menor o igual a $39$. Una vez proporcionado el número, en caso de ser posible, que obtengan el resultado de dividir al mismo entre $3$ para obtener $n$ (o indique el número a considerar). Obtenido el número, solicite que extraiga del grupo de las $25$ fichas los cuatro números consecutivos anteriores a él (el antecesor de él, el antecesor del antecesor de él, y así sucesivamente) y los cuatro siguientes consecutivos a él (el sucesor del número, el sucesor de su sucesor, y así sucesivamente).

Ahora, separen los números en bloques de tres, de tal forma que la suma de cada uno de ellos dé como resultado el valor previamente hallado. Solicite, finalmente, el cuadrado mágico correspondiente.

En este ejemplo seguimos trabajando con enteros positivos y aplicando el concepto de serie numérica. Más aún, podemos iniciar el estudio de una serie aritmética.

Observación. Puede aplicarse la implementación discutida en la actividad anterior utilizando decenas, centenas o unidades de millar, asociadas a los números naturales obtenidos. En este caso, estaremos aplicando el concepto de serie aritmética (que se incrementa en términos de decenas, centenas o unidades de millar, según sea el caso). Se involucra además el concepto de múltiplo de $10, 100$ y $1000$, y equivalentemente, la multiplicación por cantidades terminadas en ceros.

Puede considerar como ejercicio adicional lo siguiente, utilizando las fichas del $1$ al $17$. Pregunte a los estudiantes por qué, bajo la condición de ser el número solicitado múltiplo de tres y tomando en cuenta las $17$ fichas (bajo las restricciones de nuestro cuadrado mágico), el espacio de solución únicamente nos permite obtener $9$ cuadrados mágicos diferentes con estas fichas que satisfagan la condición solicitada (restricción).

Por ejemplo, para $n = 39$ obtenemos el valor $13$, luego las fichas requeridas y el cuadrado mágico correspondiente es:

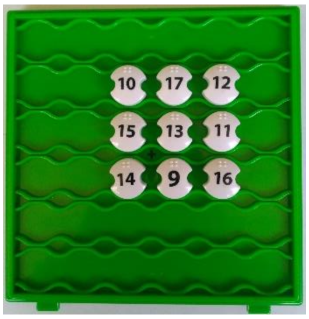



Figura 6. Solución del cuadrado mágico, caso $n = 39$

Ejemplo 3.

Extenderemos la aplicación del cuadrado mágico para que incluya al cero y, en algunos casos, a los enteros negativos, pero bajo la restricción de que la suma debe ser un múltiplo de tres mayor o igual a cero.

Solicitemos a los estudiantes que indiquen los múltiplos de $3$ mayores o iguales a $0$ y menores que $15$. Aquí, el espacio de solución debe estar constituido por $\{0, 3, 6, 9, 12\}$. Deben elegir uno de estos números y dividir entre $3$. Una vez obtenido el número, se forma el grupo de fichas como se describe en los ejemplos previos, y aplicando los procedimientos discutidos previamente, se obtiene el cuadrado mágico correspondiente.

Veamos por ejemplo para $n = 0$, el cuadrado mágico resultante es:

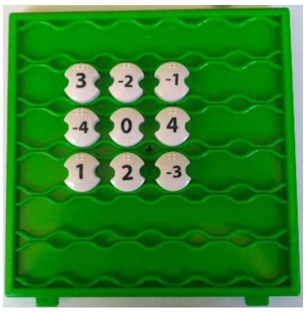



Figura 7. Solución del cuadrado mágico, caso $n = 0$

Este ejemplo particular permite introducir o recordar el concepto de neutro aditivo e inverso aditivo.

Ejemplo 4

Ahora extendamos nuestros ejemplos a los enteros negativos. Es importante hacer del conocimiento de los estudiantes que el conjunto de fichas disponibles constituido de las fichas de valor $-9$ a la ficha de valor $17$ ($25$ fichas totales), nos limitará en la construcción de los cuadrados mágicos que estamos calculando y que poseen ciertas características particulares. Sin embargo, los procedimientos vertidos permiten obtener un sinfín de ellos.

El número negativo a elegir está en el siguiente conjunto de valores $\{-9, -6, -3\}$. El procedimiento a seguir es totalmente análogo a lo previamente discutido. Esta actividad debe aplicarse a los estudiantes de secundaria y, en algunos casos, de ser posible, a los estudiantes de quinto y sexto grado de primaria.

Para $n = -9$, el cuadrado mágico es:

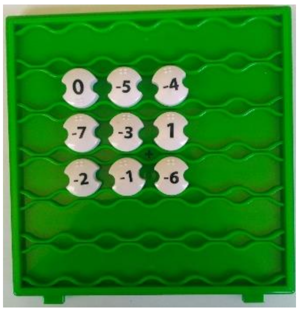



Figura 8. Solución del cuadrado mágico, caso $n = -9$

En función de los expuesto, concluimos que si consideramos las $25$ fichas de números enteros que tenemos, es posible hallar $17$ cuadrados mágicos diferentes, bajo las condiciones previamente analizadas (condición de restricción, pues más adelante, si omitimos la restricción de que deban ser números consecutivos, nuestras $25$ fichas nos permitirán hallar otros cuadrados mágicos, pero esto se ilustra más adelante con otros ejemplos) ¿cuántos cuadrados mágicos podemos obtener si el número de fichas del que disponemos son un total de 31 fichas de números enteros consecutivos, y aplicamos la restricción (números consecutivos)? ¿Cuántas fichas requerimos para obtener un total de $50$ cuadrados mágicos, que satisfagan las condiciones previamente estudiadas?

Ejemplo 5.

Estudiaremos ejemplos diversos que utilizan números fraccionarios en la construcción del cuadrado mágico. En este caso las ficha que utilizaremos tienen denominadores $2, 3$ y $4$. Sin embargo, el docente puede utilizar los denominadores, según convenga. Recordar que estamos introduciendo una restricción en la construcción de los mismos. Y es que entre los elementos de la sucesión numérica la diferencia (o distancia) entre dos números consecutivos es $1$ (serie aritmética). En este ejemplo consideremos cantidades fraccionarias (propia e impropias) con el mismo denominador común para operar sumas y restas. En el caso de fracciones con diferente denominador, haremos uso del mínimo común múltiplo. Por esa razón, este ejemplo puede aplicarse a los estudiantes desde tercero de primaria hasta nivel secundaria, considere obviamente las respectivas restricciones en la aplicación para el nivel correspondiente.

Tome el grupo de fichas que corresponde a fracciones. Pida que extraigan todas las fichas con denominadores 2 y mayores o iguales a un medio y menores o iguales a diecisiete medios y que las ordenen en forma ascendente o descendente.

Solicite, por ejemplo, que determinen la distancia o diferencia del primer y último término, entre términos consecutivos. Posteriormente, solicite que realicen la suma de todos estos términos. El estudiante, al observar que todas las cantidades poseen el mismo denominador, puede concluir que para hallar la suma, el problema se reduce a obtener la suma de los numeradores, obteniendo así:

$$1+3+5+7+9+11+13+15+17=81$$

Equivalentemente:

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+\frac{7}{2}+\frac{9}{2}+\frac{11}{2}+\frac{13}{2}+\frac{15}{2}+\frac{17}{2}=\frac{81}{2}$$

Se observa que en la expresión anterior estamos obteniendo la suma de los primeros nueve números impares (obtenemos así un ejemplo de serie aritmética, en donde la diferencia entre dos términos consecutivos es $2$. Solicite que escriban el término general de la serie numérica). Indique que obtengan un cuadrado mágico cuya suma sea $^{27}/_{2}$, y pida que justifiquen esto.

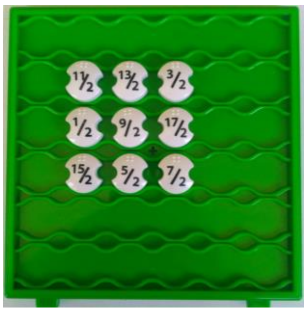



Figura 9. Solución del cuadrado mágico, caso $n = {}^{27}/_{2}$

Compare éste cuadrado mágico con el cuadrado mágico que se obtiene para el caso $n = 27$ y los valores $h = 5$ e $i = 7$. ¿Existe alguna similitud entre los cuadrados mágicos?

Ejemplo 6

Podemos aplicar el procedimiento anterior para las fichas con denominador tres. Solicite las fichas.

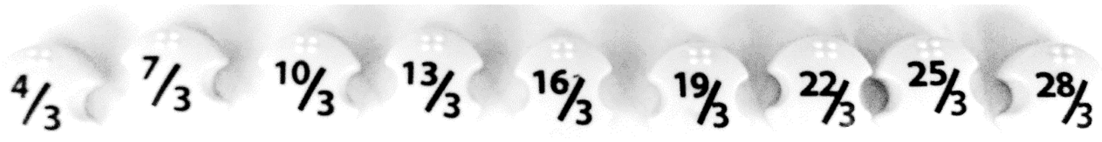



Figura 10. Fichas con denominado un tercio

Solicite que obtengan el correspondiente cuadrado mágico, el cual debe ser:

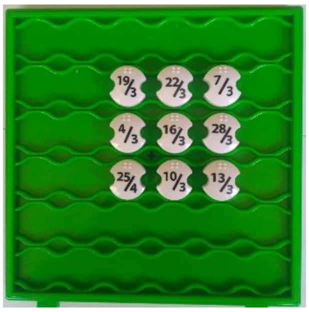


Figura 11. Solución del cuadrado mágico, caso $n = 16$

Podemos relacionar la serie numérica $4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28$, con el cuadrado mágico anterior. Justifique su respuesta.

Ejemplo 7.

Indique las actividades a desarrollar para obtener el siguiente cuadrado mágico.

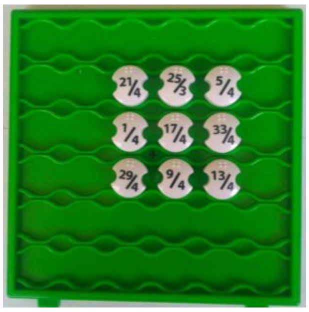


Figura 12. Solución del cuadrado mágico, caso $n = {}^{51}/_{4}$

Se observa que en este caso la serie numérica asociada es
$1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29,$

$33.$

Consideremos las siguientes observaciones para los tres últimos ejemplos (y que podemos aplicarlos en general a todos los ejemplos presentados) con respecto al ejemplo 5. Un somero análisis nos permite concluir que para resolver el mismo es suficiente con estudiar el numerador, y con esto obtener un cuadrado mágico cuya suma es $27$. Así, obtenemos un cuadrado mágico que es distinto al que puede obtenerse utilizando la técnica de nueve números consecutivos. Sin embargo, si sustituimos en $h$ e $i$ los valores $5$ y $7$, respectivamente, en el sistema estudiado al principio, obtendríamos los restantes valores que involucran la solución que mostramos a continuación.

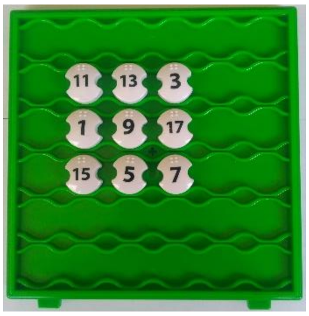



Figura 13. Solución del cuadrado mágico, caso $n = 27$

Realicemos, por último, sobre el cuadrado mágico clásico, las siguientes modificaciones, motivado por lo anteriormente discutido. Nuestro cuadrado mágico para considerar es:

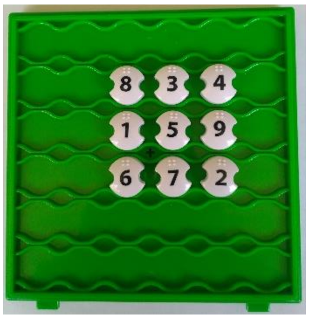



Figura 14. Cuadrado mágico, caso $n = 15$

Solicite a los estudiantes que sumen a cada ficha el número $5$, sustituyendo por la ficha correspondiente el resultado de esta operación y respetando la ubicación de esta en la anterior disposición. Obtenemos así lo siguiente:

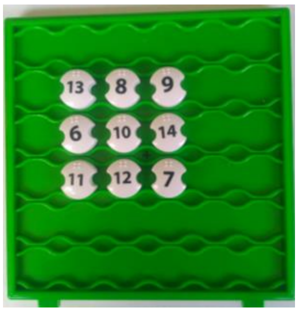



Figura 15. Cuadrado mágico, caso $n = 30$

Ahora en vez de sumar, pídale que reste el número 12 al cuadrado mágico clásico. El estudiante debe concluir que el conjunto de números enteros es suficiente para resolver este problema. La solución a lo anterior la describe el siguiente cuadrado mágico.

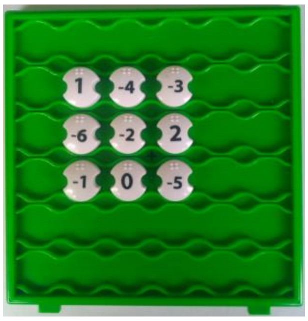



Figura 16. Cuadrado mágico, caso $n = -6$

Observe que, en este caso, nuestra serie numérica comienza en un número negativo, y la serie es $-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$.

Claramente, observamos que estos son de nuevo cuadrados mágicos. Esto, a su vez, nos sugiere la siguiente implementación con respecto a la multiplicación y divisiones, como lo muestra este cuadrado mágico.

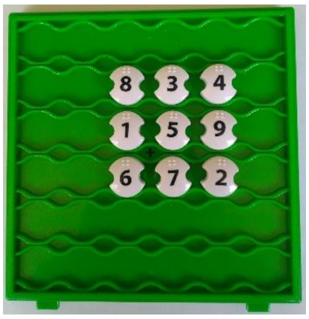



Figura 17. Cuadrado mágico, caso $n = 15$

Aplique lo siguiente: divida cada ficha entre $4$, reemplace la ficha por la correspondiente solución de esta operación respetando, como siempre, la disposición de las mismas en el cuadrado. Así, con las correspondientes simplificaciones, obtenemos como resultado el siguiente cuadrado mágico.

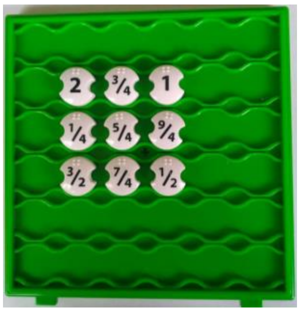



Figura 18. Cuadrado mágico, caso $n = {}^{15}/_{4}$

Hasta este punto, hemos observado algunas operaciones básicas sobre cuadrados mágicos que se aplican a cualquiera de éstos y hemos abordado algunos casos particulares. Los ejercicios que incluye este documento incorporan combinaciones de números naturales y racionales positivos. Veamos ahora uno que involucre números decimales. Para este último, considere el cuadrado mágico clásico, dividiendo entre $10$ cada uno de los números que aparecen en el mismo. Obtenemos así un ejemplo de un cuadrado mágico con números decimales.

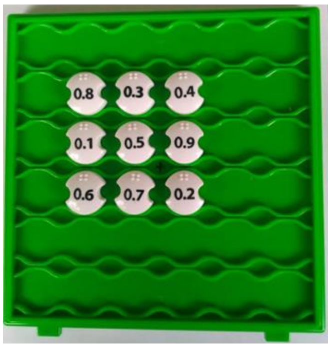



Figura 19. Cuadrado mágico, caso $n = 1.5$

Consideremos nuevamente el cuadrado mágico clásico. Sume entrada a entrada el cuadrado mágico, pero considere la siguiente modificación: un cuadrado mágico representa unidades y el otro las decenas. El cuadrado mágico que se obtiene es el siguiente.

Figura 20. Cuadrado mágico, caso $n = 165$

Ahora sume al mismo cinco centenas en cada entrada. Describa cuál es el cuadrado mágico que se obtiene.

Observación. Las operaciones realizadas con los cuadrados mágicos, es decir, sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, son aplicables a un ente matemático llamado matriz (un cuadrado mágico puede verse como un arreglo matricial de $n$ renglones y $n$ columnas).

## Aprendizajes esperados

Se pretende que los estudiantes refuercen lo relacionado con el cálculo mental (usar las operaciones básicas de suma, resta, división y multiplicación) además de trabajar con algunos términos de las series aritméticas, además de encontrar formas de resolver problemas y formular argumentos que validen los resultados.

## Referencias

Jesús Alarcón Bortolussi, Elisa Bonilla Rius, Rocío Nava Álvarez, Teresa Rojano Cevallos, Ricardo Quintero. (1994). Libro para el maestro, Educación Secundaria. México: Secretaría de Educación Pública.

Lynn Arthur Stenn. (2008). La enseñanza agradable de las matemáticas. México: Limusa.

Édouard Lucas. (2007). Recreaciones matemáticas. España: Libros Ediciones Nivola.

Eduardo Zárate Salas. (2000). Aprende matemáticas jugando. México: UPN.

# Uso pedagógico de las TIC en la planeación docente de la unidad didáctica Ondas Mecánicas

Leonor Pérez Trejo[50]
leopt@esfm.ipn.mx


## Resumen

Hoy en día las Tecnologías de la información y comunicación (TIC) han incursionado en todos los ámbitos de la vida moderna, gracias a ellas se puede cambiar la manera en que la gente piensa, trabaja, se comunica y aprende. Es precisamente en el ámbito educativo el interés de este trabajo, en la inclusión y el uso pedagógico de las TIC en la planeación docente. En este trabajo se presenta un análisis de la integración de las TIC a los procesos educativos, principalmente en el nivel universitario. Después se abordará el contexto de la unidad didáctica Ondas Mecánicas que pertenece a la unidad de aprendizaje Física II del currículo de la Licenciatura en Física y Matemáticas.


## Objetivo

En este trabajo se pretende justificar el uso de las TIC desde el punto de vista pedagógico, es decir, no sólo verlas como una sustitución del plumín y pizarrón, sino plantear los beneficios que su uso tendrá en el desarrollo de las competencias de los estudiantes.

## Marco teórico

Ahora, con el cambio de paradigma educativo, centrado en el aprendizaje, el uso de las TIC en el proceso de enseñanza – aprendizaje va más allá de la mera sustitución del gis y pizarrón por un proyector. Se esperaría que la inclusión de las TIC en educación sirviera para preparar a los alumnos para las exigencias de estar viviendo en la cuarta revolución industrial. Sobre todo, en educación superior o universitaria, en donde la formación debe ir encaminada a mejorar las competencias profesionales de manera constante; así como el conocimiento científico y las habilidades técnicas necesarias deben estar al día para mantener los estándares profesionales lo más alto posible (Guevara Albán G., Guevara Albán C. y Verdesoto, 2018). Marqués Graells (2012) considera que hay tres grandes razones para incluir a las TIC en la educación; primeramente, se puede alfabetizar a los alumnos en su uso, es decir, aprender sobre las TIC; lo que puede llevar a, y esta es la segunda razón, aumentar la productividad , o lo que se establece como aprender de las TIC y la tercera razón tiene que ver con el aprovechamiento de nuevas posibilidades didácticas para lograr que los alumnos realicen mejores aprendizajes y se reduzca el fracaso escolar (aprender con de las TIC), es decir, las TIC permiten innovar en las practicas docentes.

[50] Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Física y Matemáticas, Depto. de Física.

Para que se pueda innovar en la educación con el apoyo de las TIC, es necesario tomar en cuenta los cambios que cada uno de los actores involucrados, alumnos, profesores e instituciones, deben realizar. En el sistema tradicional, el alumno solamente acumula conocimientos sin saber si lo que aprende es relevante; con las TIC deberá asumir que el profesor y el libro de texto ya no son las únicas fuentes de información, por lo tanto, tendrá que seleccionar, utilizar y organizar la información, de manera que vaya formándose como un maduro ciudadano de la sociedad de la información y del conocimiento. Por su parte, el profesor debe cambiar de ser transmisor de conocimiento a los alumnos a ser mediador en la construcción de su propio conocimiento (Salinas, 2004). Estudios recientes en España han encontrado que el cambio de rol del profesor es uno de los mayores desafíos a los que se enfrentan las universidades para mejorar los sistemas de formación (Sancho, Ornelas y Arrazola, 2018). En cuanto a las instituciones, aparte de proporcionar la infraestructura necesaria (internet, hardware, software, etc), debe de brindar apoyo al profesorado para la formación y actualización en el uso de las TIC, así como mantener una revisión continua de los programas de estudio (Salinas, 2004). Sin embargo, innovar en el aula se percibe un tanto complicado, ya que como menciona Cabero (2009) “nuestras escuelas son del siglo XIX, por sus estructuras organizativas, con profesores del siglo XX por la formación que tienen y con alumnos del siglo XXI por sus competencias, capacidades y formas de procesar la información.”

La incursión de las TIC en la educación y en particular en la educación universitaria, requiere que el profesorado cuente con sólidos conocimientos tanto en su área disciplinar como en pedagogía y tecnología. Un modelo que se propone para que el profesor integre las TIC en su práctica docente es el llamado modelo TPACK (*Technological Pedagogical Content Knowledge*). En este modelo, los conocimientos no trabajan aislados, sino que están entrelazados entre ellos, generando nuevos conocimientos que emergen del modelo. La figura 1 muestra mediante un diagrama de Venn la interacción entre los conocimientos base y la generación de nuevos conocimientos. Como se puede observar, implementar este modelo no se ve una tarea fácil, primeramente, por el dominio que se debe tener de los nuevos constructos que surgen de la intersección de los conocimientos base, y por otro lado, los contextos en los que se deben desarrollar estos conocimientos. Los contextos en los que se mueve el profesorado universitario son: el social, por los cambios que sufre la sociedad a nivel global tanto a nivel tecnológico como económico y cultural; el institucional, ya que se deben cumplir los objetivos y metas que tenga la institución; y el del aula, que es el contexto más cercano al docente y en el que se deben considerar principalmente el perfil de los estudiantes y su estilo de aprendizaje (Cejas, Navío y Rabosa, 2016) para crear los ambientes adecuados para el proceso de enseñanza - aprendizaje.

Tradicionalmente, a los recursos para apoyar el aprendizaje se les considera meros instrumentos y medios que proveen al profesor de pautas y criterios para la toma de decisiones tanto en la planificación como en la intervención y evaluación en el proceso de enseñanza, es decir, su uso se centra en el profesor no así en los alumnos. Con la incursión de las TIC en la educación se han generado nuevos retos para el diseño y desarrollo de nuevos materiales pedagógicos que garanticen que los estudiantes adquieran, comprendan y sean capaces de hacer con lo que ya conocen la construcción social e individual de su conocimiento, el estudiante de hoy es el protagonista del uso y desarrollo de los diversos recursos con los que complementa su aprendizaje, al conjunto de estos recursos y herramientas se le conoce como Ambientes Virtuales de Aprendizaje (AVA). Con el apoyo y mediación de un AVA, el aprendizaje de los alumnos se fortalece debido a que la relación y comunicación con el profesor se torna más abierta y flexible, las dificultades de tiempo y espacio se modifican sustancialmente y la formación se vuelve más activa e interactiva, lo cual puede ser altamente motivante (López, 2017). No obstante, también se pueden mencionar algunas desventajas, por ejemplo, que la disposición de las herramientas tecnológicas en el espacio destinado en el aula no sea la adecuada, la inversión de tiempo para diseñar actividades es mayor que para una clase tradicional, que el profesor no esté capacitado totalmente para manipular la herramienta tecnológica, que la actividad distraiga más de lo que apoye, entre otras (Guevara Albán G., Guevara Albán C. y Verdesoto, 2018).

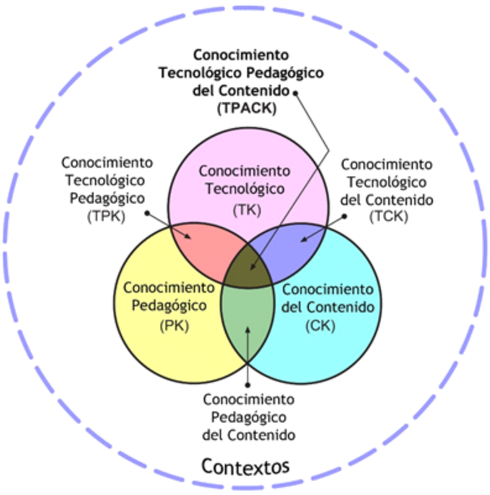



Figura 1.- Representación mediante un diagrama de Venn del modelo TPACK.

## Desarrollo

En particular, la intervención didáctica se hará en el tema de Ondas mecánicas que pertenece a la unidad de aprendizaje Física II, la cual se imparte en el segundo semestre de la carrera. De la experiencia de impartir varias veces esta unidad de aprendizaje se ha detectado que los estudiantes manejan varios preconceptos o concepciones alternativas (Ibarra, Marmolejo, González y Pérez, 2016) que si no se trabaja en abolirlos afectaran en gran medida al rendimiento del estudiante en unidades de aprendizaje posteriores como Electromagnetismo, Óptica y Mecánica Cuántica.

Dentro de las primeras acciones de intervención que se han hecho está, apelando a la libertad de cátedra, el modificar el orden de los subtemas sin afectar el programa oficial, sólo que en mi experiencia, el orden que propongo, facilita el entendimiento de los conceptos esenciales. La tabla 1 muestra el orden propuesto para abordar los temas, así como los objetivos correspondientes y las estrategias para cubrirlos. En la tabla II se presentan los recursos digitales que considero pueden ayudar a fortalecer el aprendizaje de los estudiantes, todos ellos de acceso libre. El tiempo en el uso de los recursos digitales por parte de los estudiantes dependerá de las habilidades que cada uno tenga en el manejo de las mismas.

## Aprendizajes esperados

Según Luna Scott (2015) las competencias que necesitan los estudiantes para afrontar los retos del siglo XXI son las siguientes: Pensamiento crítico y resolución de problemas, Colaboración y liderazgo, Agilidad y adaptabilidad, Iniciativa y espíritu empresarial, Comunicación oral y escrita eficaz, Acceso a la información y análisis de la misma, Curiosidad e imaginación.

Pontes, citado por Botero en 2011, sugiere que las funciones formativas de las TIC se pueden clasificar en tres categorías: *conceptuales*, *procedimentales y actitudinales.* Las conceptuales facilitan el acceso a la información y favorecen el proceso de aprendizaje de conceptos, en esta categoría se pueden considerar a los recursos 1, 2, 3 y 6 propuestos en la tabla II. Las herramientas cognitivas involucran a los alumnos en un pensamiento crítico acerca del contenido que están estudiando y le sirven de andamiaje a diferentes formas de razonamiento (Miranda, Santos y Stipcich, 2010) lo cual es indispensable para la resolución de problemas. También, los recursos 1, 2, 3, y 6 ayudarán al desarrollo de las competencias que menciona Luna Scott (2015), como son: acceso y análisis de información y favorecen la curiosidad e imaginación.

Las funciones formativas procedimentales hacen relación al aprendizaje de procedimientos científicos y al desarrollo de destrezas intelectuales, los recursos digitales 3 y 6 entrarían en esta categoría y se espera que potencien esta función formativa. En particular, las herramientas interactivas se relacionan de manera directa con los estilos de aprendizaje de los alumnos, ya que cada uno puede tomarse el tiempo que necesite para manipularlas y favorecer la conceptualización y la formación de modelos mentales, además de que les permiten enfocarse en variables específicas de una dinámica y aprender significativamente si se diseña una estrategia adecuada (Miranda, Santos y Stipcich, 2010).

Tabla I. Orden de temas propuesta para abordar la unidad didáctica Ondas Mecánicas.

| No. Y NOMBRE DE LA UNIDAD | OBJETIVOS | TEMA | ESTRATEGIA, PROCEDIMIENTO O ACTIVIDAD |
|---|---|---|---|
| Unidad III Ondas Mecánicas | Analizar e interpretar los conceptos relacionados con ondas mecánicas y diferenciar los tipos de onda.<br>Aprender a utilizar la relación entre rapidez, frecuencia y longitud de onda en una onda periódica.<br>Interpretar y utilizar la expresión matemática de una onda periódica.<br>Aprender a calcular la rapidez con la que las ondas mecánicas transportan energía.<br>Identificar los fenómenos ondulatorios que producen una onda estacionaria.<br>Describir las ondas sonoras como fluctuaciones de presión.<br>Calcular la rapidez de las ondas sonoras en diferentes medios.<br>Analizar el efecto Doppler en ondas mecánicas. | III.1 Movimiento periódico, movimiento oscilatorio, movimiento armónico simple (MAS), movimiento ondulatorio. | Previo a la clase los alumnos utilizaran recurso digital 1.<br>En clase, profesor dirige actividad lluvia de ideas para crear un diferenciador semántico. |
| | | III.2 Definición y tipos de ondas (longitudinales y transversales). | Exposición del profesor mostrando ejemplos físicos del tipo de ondas (cuerda y resorte)<br>Alumnos usar recurso digital 2 para portafolio de evidencias. |
| | | III.3 Ondas en una cuerda (rapidez, frecuencia y longitud de onda). | Exposición del profesor en clase.<br>Uso de recurso digital 3 por los alumnos para el portafolio de evidencias. |
| | | III.4 Ecuación de onda.<br>III.5 Energía en el movimiento ondulatorio. | Exposición del profesor en clase usando el recurso digital 4 |
| | | III.6 Ondas estacionarias (Reflexión, Interferencia, modos normales).<br>III.7 Ondas sonoras (ondas esféricas, propagación en diferentes medios, resonancia, intensidad).<br><br>III.8 Efecto Doppler. | Exposición del profesor en clase usando el recurso digital 4.<br>Los estudiantes usarán el recurso digital 3 donde podrán "experimentar" cambiando las características de las ondas mecánicas.<br>Otra opción es experimentar ya sea en clase o fuera de ésta con el recurso digital 6. |

Las funciones formativas actitudinales fomentan el desarrollo de actitudes favorables en el proceso de aprendizaje. Dentro de estas funciones se pueden considerar las actitudes de colaboración y liderazgo, agilidad y adaptabilidad iniciativa y espíritu empresarial que se mencionan en Luna Scott. Por otro lado, la exploración de programas interactivos y la búsqueda de información de carácter científico por Internet, favorece la función formativa actitudinal en los estudiantes, desde mi perspectiva, todos los recursos de la tabla II cumplen con esta función.

Tabla II.- Recursos Digitales y su aporte pedagógico.

| *No.* | *Recurso* | *Aporte Pedagógico* | *Objetivo de uso* | *Modelo de implementación* |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Revistas electrónicas | La búsqueda de información científica relevante favorece la | Que el alumno conozca otras fuentes de información formal, | Modelo 1 a 1 ya que el estudiante puede acceder en |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Revista Mexicana de Física, Physics Today, Nature, entre otras. | función formativa y actitudinal de los estudiantes<br>Propicia el aprendizaje autónomo del estudiante. | que les permitan tener acceso a temas novedosos en el área de la Física, así como de la interacción de esta disciplina con otras áreas del conocimiento. | cualquier momento y desde cualquier lugar. |
| 2 | EdPuzzle<br>Video de soldados marchando haciendo diferentes coreografías. | Favorece el aprendizaje de conceptos, en particular de Física. Al mismo tiempo se puede realizar una evaluación que permita al estudiante tener conciencia de su aprendizaje. | Esta herramienta permite editar videos tanto propios como los que se encuentran en la red. Se pueden agregar preguntas abiertas y de opción múltiple a lo largo del video y las respuestas se almacenan en una hoja de datos por alumno y le llegan al profesor. Por lo que sirve también para evaluar los aprendizajes de los estudiantes. | El modelo 1 a 30 creo que es el que más se acerca ya que es el profesor el que hace la invitación a los alumnos para que entren al programa, sin embargo no necesariamente se lleva a cabo en el salón de clase. |
| 3 | PHET Interactive Simulations for science and math | Beneficia la enseñanza de conceptos. Cada alumno puede acceder al tema de su preferencia o al que le cueste más trabajo de comprender, por tanto esta herramienta favorece la inclusión para atender a la diversidad. | Uno de los problemas que hemos detectado en esta asignatura es el de los conceptos alternativos (erróneos o equivocados) por parte de los alumnos. Esta herramienta puede ayudar que se comprendan mejor los conceptos involucrados. | Modelo 1 a 1 ya que el estudiante puede acceder en cualquier momento y desde cualquier lugar. |
| 4 | Power Point, Prezzi | Permite al profesor diseñar materiales educativos para favorecer la enseñanza. Pone énfasis en el desarrollo de competencias procedimentales de los alumnos (al diseñar ellos sus presentaciones) para demostrar el logro de los estándares curriculares y los aprendizajes esperados. | Que el profesor gestione el tiempo de la clase de manera óptima.<br>Que los estudiantes desarrollen la competencia de comunicación de manera oral y la de trabajo colaborativo.<br>Evaluar los aprendizajes esperados según los contenidos del programa de la unidad de aprendizaje. | Modelo 1 a 30 ya que durante las presentaciones sólo quien está exponiendo manipula el equipo. |
| 5 | Grupo cerrado en Facebook | Propicia el aprendizaje autónomo del estudiante al indagar temas | Que los estudiantes compartan inquietudes, dudas, | Modelo 1 a 1 ya que el estudiante puede acceder en |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | relacionados con los contenidos del programa y compartirlos en este grupo. Al mismo tiempo, este recurso permite dar tutoría y asesoría académica. | nuevos materiales, etc., crear debate y dar asesorías. | cualquier momento y desde cualquier lugar. |
| 6 | Aplicaciones en teléfonos inteligentes (generador de frecuencias, osciloscopio, medidor de decibeles, entre otros) | Propicia el aprendizaje autónomo del estudiante al indagar temas relacionados con los contenidos del programa.<br>El alumno desarrolla competencias procedimentales de tipo tecnológico. | Este recurso se puede utilizar directamente en clase y puede ser de mucha utilidad para fortalecer los conceptos que el profesor exponga. | Modelo 1 a 1 ya que el estudiante puede utilizar su propio teléfono móvil. |

## Referencias

Botero Quiceno H, "Aportes generales de las TIC a los procesos educativos", Revista de Educación y Pensamiento, ISSN 1692-2697,Nº. 18, 2011, págs. 46-53.

Cabero Almenara Julio, "Innovación en la formación y desarrollo profesional docente", Capítulo 6 del libro **Innovación Educativa y uso de las TIC** coordinado por Jesús Salinas Ibáñez, Sevilla: Universidad Internacional de Andalucía, 2008.

Cejas León R, Navío Gómez A, Barroso Osuna J, "Las competencias del profesorado universitario desde el modelo TPACK (conocimiento tecnológico y pedagógico del contenido)", Píxel-Bit. Revista de Medios y Educación. Nº 49 Julio 2016. ISSN: 1133-8482. e-ISSN: 2171-7966

Guevara Albán G. P., Guevara Albán C. S., Verdesoto Arguello A. E. "Redes Informáticas aplicadas a la Educación", Revista Científica Mundo de la Investigación y el Conocimiento. Vol. 2 núm.2, mayo, ISSN: 2588-073X, 2018, pp. 24-44

Ibarra Morales A, Marmolejo R. D., González A. L, Pérez T. L., "Los preconceptos sobre ondas en estudiantes universitarios" **Contribuciones a la Ciencia en México** Vol 2, 2016

López Carrasco M. A., **Aprendizaje, competencias y TIC**, 2ª edición, editorial Pearson, 2017

Luna Scott C, "El futuro del aprendizaje 2- ¿Qué tipo de aprendizaje se necesita en el siglo XX1?, Investigación y prospectiva en educación: Documentos de trabajo, UNESCO 2015

Marqués Graells Pere, “Impacto de las TIC en la educación: funciones y limitaciones”, 3Ciencia, 3C TIC, No. 3 (Diciembre 2012)

Miranda, A., Santos, G. y Stipcich, S., “Algunas características de investigaciones que estudian la integración de las TIC en la clase de Ciencia”, *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, *12*(2) 2010.

Salinas Jesús, “Innovación docente y el uso de las TIC en la enseñanza universitaria”, Revista Universidad y Sociedad del conocimiento, Vol. 1, No. 1 (Noviembre 2004)

Sancho Gil, Juana M., Ornellas Adriana, Arrazola Carballo Judith, “La situación cambiante de la universidad en la era digital”, RIED, 21(2), pp. 31-49, (2018)

# Estudio documental del aprendizaje por proyectos con enfoque socioformativo, mediante la Cartografía Conceptual

Faridy Bermeo Yaffar
faridybermeo74@gmail.com

**Resumen**

El presente estudio analiza las características de la estrategia didáctica llamada, “elaboración de proyectos con enfoque socioformativo”, con el fin de afrontar los retos didácticos dentro del campo del pensamiento matemático. La enseñanza de las matemáticas se ha caracterizado, en el Nivel Medio Superior, por centrarse en la mecanización de los procedimientos. Sin embargo, la falta de comprensión, reflexión y argumentación de los procesos matemáticos han generado que el pensamiento matemático sea una meta difícil de alcanzar en el aprendizaje de las actuales generaciones. La metodología consistió en un estudio documental con el apoyo de las categorías de análisis que conforman la cartografía conceptual, por lo que se realizó una revisión en fuentes primarias y secundarias del concepto de proyectos bajo el enfoque socioformativo. Entre los principales resultados se destacan las cuatro metas claves que sustentan los proyectos socioformativos, que son: formar y consolidar el proyecto ético de vida, tener emprendimiento, desarrollo de competencias para enfrentar los retos y situaciones del contexto y trabajar de manera colaborativa. La formación mediante proyectos socioformativos provoca que se lleve a cabo una comprensión, análisis, interpretación y resolución de problemas vinculando diferentes conceptos y áreas de conocimiento para lograr un aprendizaje significativo. Así como, participar aportando conocimientos, reflexiones, análisis y propuestas a las sociedades del conocimiento. En el apartado de ejemplificación dentro de las etapas de la cartografía conceptual, se aborda un problema contextualizado en el área de estadística, el cual consiste en la toma de muestra de glucosa durante 80 días a personas que padecen diabetes, los cuales no tienen un control de alimentación ni de medicamento, se calculan las medidas de tendencia central, las medidas de dispersión y las gráficas, se analizan los grupos de alimentos que fueron ingeridos en cada intervalo que se construye con las unidades de glucosa y se propone un plan de alimentación para cada persona estudiada. Los resultados obtenidos al realizar este proyecto fue que los alumnos lograron dar una propuesta de solución a una problemática extraída de su propio contexto real, lo que elevó de manera exponencial su motivación, compromiso, responsabilidad, solidaridad, para con la sociedad.

**Palabras clave:** Proyectos formativos, socioformación, estrategia, gestión del conocimiento, sociedad del conocimiento

## Objetivo

Describir las características de los proyectos basados en un enfoque socioformativo con el fin de conocer todas y cada una de las partes que lo conforman, así como, justificar que, mediante esta estrategia se logra: formar y consolidar el proyecto ético de vida, tener emprendimiento, desarrollo de competencias para enfrentar los retos y situaciones del contexto trabajando de manera colaborativa.

## Marco Teórico

El conocimiento se basa en la información situada en un contexto, la cual recibe cierto tratamiento, de tal manera que esta información tenga un análisis, una síntesis, una interpretación, una argumentación con significación y consciencia de sus interrelaciones. Por otro lado, el saber es la aplicación de conocimientos en diversas actividades y en la resolución de problemas, teniendo presente las implicaciones desde el compromiso ético~~.~~ (Tobón, 2005). La gestión del conocimiento refuerza el concepto anterior, ya que, busca y administra este conocimiento con sentido crítico, contextualizado en la sociedad y sentido de servicio a la comunidad llegando al saber, es decir, la aplicación del conocimiento para buscar el bienestar personal y social (Tobón & Núñez, 2006).

Actualmente, las sociedades del conocimiento se están fortaleciendo con el uso del internet, pues el acceso al conocimiento es universal, teniendo así un desarrollo humano y sostenible, especializándose en áreas específicas. Las sociedades del conocimiento se están articulando con las nuevas formas de elaboración, adquisición y difusión del conocimiento, abarcando dimensiones sociales, éticas y políticas enriqueciendo así los conocimientos y capacidades, valorando y aprovechando los recursos tecnológicos. Los jóvenes deben estar a la vanguardia de las nuevas tecnologías, contribuyendo e insertando éstas a su vida diaria (UNESCO, 2005).

El proceso de búsqueda, construcción, significación y aplicación del conocimiento al llevarse a cabo en la gestión del conocimiento, requiere comprender, detectar y abordar cualquier realidad de forma estratégica usando estructuras mentales y personales (Tobón & Núñez, 2006). Todo lo anterior se lleva a cabo haciendo uso de pensamientos complejos, garantizando así la construcción del conocimiento pertinente y significativo.

Un desempeño requiere combinar de manera idónea los cuatro pilares de la educación, que son: I) saber ser: este aprendizaje hace referencia a contribuir al desarrollo global de cada persona, cuerpo y mente, inteligencia, sensibilidad, sentido estético, responsabilidad individual, espiritualidad, dotándose de un pensamiento crítico y autónomo, construyendo un juicio propio para decidir cómo actuar en situaciones diversas de la vida; II) saber hacer: es poner en práctica los conocimientos de las personas y adaptándolos a su trabajo en un futuro; III) saber convivir: se refiere a aprender a no aplicar la violencia y desarrollar los valores universales; y IV) saber conocer: consiste en que cada persona debe comprender el mundo que lo rodea para vivir con dignidad, desarrollo de sus capacidades profesionales y comunicarse con los demás, complaciéndose por comprender, conocer y descubrir. (Delors, 1994)

Las decisiones que toma el profesor, dentro del aula, cuando tiene un grupo de alumnos con diferentes estilos de aprendizaje son cruciales para lograr en ellos un aprendizaje profundo. Como lo cita Wittrock (1990) en Rueda (2011):

> Algunas informaciones disponibles sobre el tema, apuntan a reconocer la importancia de los distintos ángulos de las decisiones que los docentes toman en el aula. Unos se han enfocado, por ejemplo, a establecer en qué medida los maestros toman decisiones interactivas que los llevan a modificar sus planes originales o su comportamiento en el aula; otros intentan elaborar diagramas partiendo de dichas decisiones y describen los factores que influyen en ellas, además de establecer los elementos y las señales que toman en cuenta para la adopción de tales decisiones (p. 6).

Por otra parte, otro grupo de investigaciones como las de Fuéguel (2000) en Rueda (2011), el desarrollo dentro del aula por parte de los actores:

> Visualiza las aulas como medios social y culturalmente organizados, por lo que estudia las interacciones entre profesor y alumnos tratando de identificar los significados que éstas tienen

> para cada uno de los participantes, así como las relaciones entre la clase y la escuela, la estructura formal de la organización, las normas explícitas formales y las que se van construyendo en la interacción cotidiana, entre otros muchos tópicos. Esto lo hacen a través de muy diversos recursos como la observación participante, las entrevistas, las notas de campo, la narración del recuerdo, el análisis del discurso, filmaciones, grabaciones y las interpretaciones de lo observado. Con algunos de estos recursos se ha podido dar cuenta, por ejemplo, de las relaciones que se establecen entre las dificultades cognitivas propias de una tarea y los retos de desarrollarla en el aula, entramado social complejo, sometido a continuas y múltiples evaluaciones (p. 7).

La complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje lleva a ser extremadamente precavidos en la proposición de normas y reglas para la intervención en los sistemas didácticos. Ciertamente, los profesores, no disponen de recetas de cómo enseñar, pero esto no significa que no tengan ciertos conocimientos que nos permiten tomar algunas decisiones locales preferentes. Puede ser razonable aceptar la hipótesis metodológica: Fijadas unas circunstancias (sujetos, recursos, restricciones), un "experto" en una didáctica específica puede razonar (apoyándose en resultados teóricos contrastados empíricamente) que ciertas tareas y modos de interacción en el aula son preferibles a otras diferentes. En última instancia este es el objetivo de la ciencia y tecnología del diseño educativo (Godino, 2011).

De aquí que en este trabajo se propone la realización de proyectos para lograr que el aprendizaje de las matemáticas sea significativo para el estudiante, que proponga soluciones a problemas reales de la sociedad, y que construya a partir de los datos obtenidos, un problema de ese contexto que está utilizando. Una de las herramientas que los estudiantes van a utilizar en el desarrollo de su proyecto es la UVE heurística ya que es una estrategia que facilita la comprensión del conocimiento que ha producido la ciencia, también orienta paso a paso la resolución de preguntas mediante la sistematización de la información y organiza el conocimiento. Además tiene las ventajas de: facilidad de uso, es una guía específica de trabajo, orienta a los docentes y estudiantes frente a lo que hay que hacer en cada caso, tiene un mapa de aprendizaje que posibilita que los estudiantes se vayan autoevaluando de forma general frente a los logros y aspectos a mejorar en el proceso y sirve para evaluar tanto cualitativa como cuantitativamente~~.~~ (Tobón, 2013). La UVE heurística que construyeron los alumnos contemplaron las siguientes partes: conocimientos previos empleados, justificaciones y encuadres de sus observaciones, metodología utilizada, vinculación con situaciones reales en su experiencia social y académica.

Se tienen algunos artículos donde se aborda el aprendizaje basado en proyectos para el Nivel Medio Superior como es el artículo llamado “Aprendizaje basado en proyectos para el desarrollo de competencias matemáticas en Bachillerato” por Flores & Juárez, (2017). Donde abordan problemas propuestos a los alumnos para la comprensión de la teoría de los contenidos de la asignatura de Geometría y Trigonometría. A diferencia de estas autoras, este trabajo propone abordar proyectos socioformativos, donde el objetivo principal es que los alumnos concluyan su proyecto proponiendo soluciones a problemas reales dentro de la sociedad, que ellos realmente se involucren con problemáticas que están en su contexto y sientan que sus propuestas de solución ayudan a la sociedad y de esa manera la construcción de su proyecto ético de vida sea claro y positivo.

El reto que se aborda en esta investigación es que los alumnos logren un aprendizaje profundo sobre algún concepto dentro del área de la matemática, realizando un proyecto que resuelva un problema del contexto, proponiendo una solución para el mismo. Y finalmente proponga un problema contextualizado a partir de los datos que recopiló en su proyecto.

**Noción de aprendizaje por proyectos desde la socioformación, su desarrollo histórico y la definición actual**

La Metodología por proyectos surge en el año de 1921 y fue propuesta por William Heard Kilpatrick (1871-1965) influido por su maestro John Dewey (1859-1952), esta metodología es presentada en el ensayo titulado: *El Método de proyectos*, el cual pretende un estudio integrado y pluridisciplinar de un tema que esté relacionado con el alumno (González, 2007). Esta estrategia se basa en la libertad del estudiante para construir su propio conocimiento (Parejo 2014). Kilpatrick definió su método como un modelo formativo mediante el cual se da solución a problemas de la vida. En esta estrategia, el docente guía al alumno para que tome actitudes responsables hacia las problemáticas sociales, causando una motivación e interés en el aprendizaje. El uso de conocimientos previos y las experiencias son importantes en el desarrollo de los proyectos (Parejo, 2014).

El método de proyectos se sustenta en el principio de la globalización del proceso enseñanza-aprendizaje y fomenta el desarrollo de las competencias básicas. Kilpatrick asegura que usando este método logra desarrollar el aprendizaje a partir del interés de los estudiantes, pues el conocimiento se vuelve relevante y significativo, el desarrollo del proyecto es a partir de un plan de trabajo libremente elegido con el objeto de realizar algo de interés para el que esté realizando esta actividad (Benítez, 2014).

Los proyectos desarrollan la comprensión de los conocimientos adquiridos, es decir, se tiene un sentido para los alumnos; en el desarrollo de esta metodología se logra planificar el propio aprendizaje, ayuda a ser flexibles, auxilia a comprender el entorno social y cultural, favorece la interpretación de la realidad y el antagonismo, vincula la vida de los alumnos, profesores con el conocimiento de las diversas disciplinas y otros saberes no disciplinarios, potencializando los conocimientos de quien realiza los proyectos. (Benítez, 2014).

Benítez, (2014) menciona los tipos de proyecto propuestos por Kilpatrick que son: a) proyecto de creación, creatividad o producción: Cuyo objetivo es la elaboración de un plan; b) proyecto de apreciación, recreación o de consumo: Consiste en disfrutar de una experiencia estética; c) proyecto de solución de problemas: Su objetivo es dar una solución a alguna interrogante intelectual; proyectos para la adquisición de un aprendizaje específico o adiestramiento: Llevan al estudiante a la adquisición de algún conocimiento o habilidad.

El mismo autor retoma la metodología sugerida por Kilpatrick:

1) Se elige un tema de manera libre por los estudiantes
2) Esta elección se realiza según el interés y necesidad de los estudiantes.
3) Se traza un plan de trabajo donde se promuevan actividades de tipo motor, manual, intelectual y estética.
4) Los docentes ofrecen intervención para motivar a los estudiantes.

5) Toma en cuenta la globalización de la enseñanza.
6) Se generan aprendizajes significativos.
7) Se lleva a cabo en un ambiente natural y cercano a los propios estudiantes.
8) Se lleva a cabo una metodología de investigación
9) Puede utilizarse a otras situaciones y/o áreas.

Benítez (2014), menciona que el uso del método de proyectos se caracteriza por: Involucrar varias áreas, involucrar al estudiante en investigaciones, permite al estudiante aprender nuevos conceptos, aplicar información y representar su conocimiento de diversas formas, existe un trabajo de colaboración con sus pares, con docentes, padres de familia, autoridades y personas de la sociedad, permite socializar el conocimiento, permite el uso de diversas herramientas como son: laboratorios, hipermedios, aplicaciones gráficas y telecomunicaciones.

Kokotsaki, Menzies & Wiggins (2016), caracterizan al aprendizaje basado en proyectos de la siguiente manera: El aprendizaje basado en proyectos es una forma de instrucción que se centra en los estudiantes y está basada en tres principios del enfoque constructivista; el aprendizaje debe ser específico de un contexto, los estudiantes participan de manera activa en el proceso de aprendizaje y logran la comprensión de conceptos mediante las interacciones sociales y el intercambio de conocimientos. El desarrollo del aprendizaje basado en proyectos se basa en la investigación y se vincula a problemas del contexto (reales), proponiendo soluciones; logrando así un aprendizaje significativo. Los autores afirman que los alumnos requieren de oportunidades para construir conocimientos por medio de preguntas, diseños y conducción de investigaciones, además la recopilación, análisis e interpretación de información y datos, así como representaciones e informes de resultados. Los alumnos construyen su conocimiento conceptual mediante la sistematización de la obtención de información y la reflexión de los resultados obtenidos. Los alumnos aprenden a trabajar de manera autónoma, motivados por los contextos que manipulan, pues son situaciones conocidas por ellos, vividas por ellos, los ayuda a ser creativos y ejercitan la iniciativa para diseñar y crear proyectos. Con evaluaciones hechas con rúbricas, los alumnos logran autoevaluarse y co-evaluarse logrando autorregular su propio aprendizaje.

Finalmente, el abordaje del aprendizaje por proyectos desde el enfoque socioformativo se propone la siguiente definición: “Los proyectos formativos son un conjunto articulado de actividades para resolver un problema del contexto y obtener un producto relevante o con sentido, con el fin de mejorar las condiciones de vida” (Tobón, 2018, p. 5). Esta metodología se va adaptando conforme avanza la construcción del proyecto. También se resuelven problemas del contexto aplicando los conocimientos, abordados de manera colaborativa, pero llevándose a cabo la mediación y evaluación continua. La resolución de los problemas se realiza mediante la aplicación del pensamiento complejo, haciendo vinculaciones con diferentes áreas del conocimiento, siendo creativos y analizando de manera crítica, y sobre todo se brinda un beneficio o servicio para mejorar las condiciones de vida (Tobón, 2018).

En la siguiente figura se muestra los ejes esenciales de la socioformación:

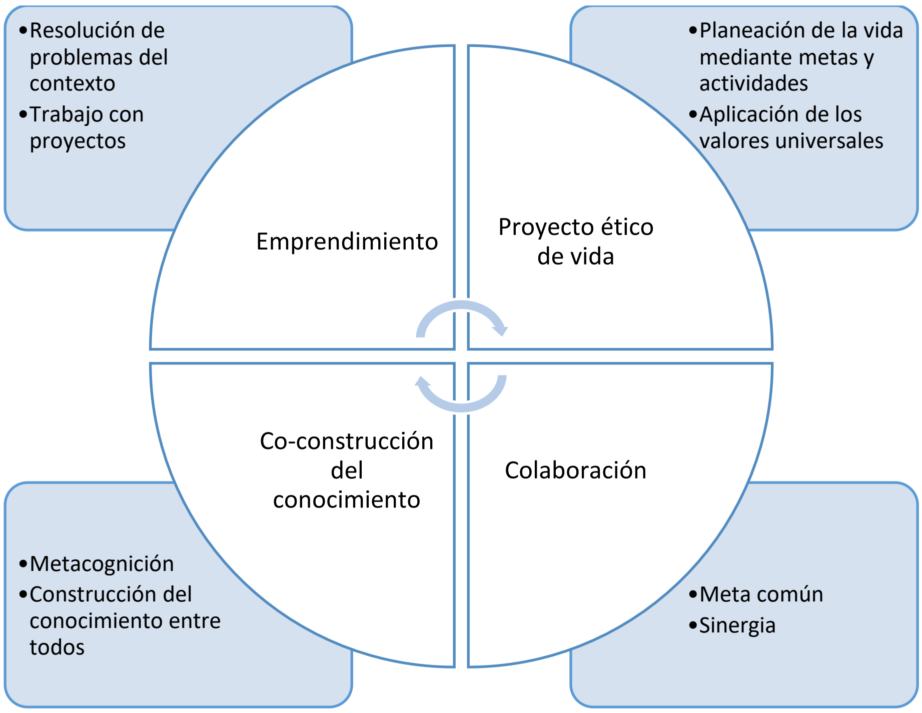



*Figura 1*. Ejes esenciales de la socioformación.

### *Categorización de aprendizaje por proyectos desde la socioformación*

La elaboración de proyectos desde la formación está categorizada como estrategia de didáctica de aprendizaje. Son muchos los autores que han desarrollado la definición estrategia de aprendizaje, en este artículo se hará referencia a las definiciones y características que explican esta categorización. Los métodos de enseñanza de los docentes, la cantidad de actividades y el tipo de tareas influyen en como aprenden los alumnos (Monroy y Pina, 2014 en Visbal, Mendoza, & Díaz, 2017); dentro de las aulas se enfrenta una gran problemática cuando las estrategias y saberes cognitivos y autorreguladores no son los apropiados (Díaz-Barriga & Hernández, 2002) las estrategias didácticas son diseños complejos que se basan en el análisis, articuladas con una serie de acciones dirigidos a un objetivo determinado (Martínez y Rentería, 2006 en Visbal, Mendoza, & Díaz, 2017).

Actualmente se requiere que los conceptos se materialicen a través de la experiencia (Rios (2012) en Visbal, Mendoza, & Díaz, 2017); el uso de estrategias de aprendizaje hace que el alumno pueda apropiarse de una forma elaborada, ordenada y significativa de los conceptos (Beltrán, 2003 en Visbal, Mendoza, & Díaz, 2017); las características principales de las estrategias de aprendizaje dichas por Lima, 2009 en Visbal, Mendoza, & Díaz, 2017 son: aquellas que promueven un aprendizaje efectivo, permiten secuenciar, ordenar y trabajar con exactitud los contenidos, evitan la improvisación, fomentan el trabajo colaborativo, dinamizan el proceso enseñanza-aprendizaje, favorecen la socialización, el alumno autorregula sus conocimientos.

Díaz-Barriga & Hernández (2002) realizan un análisis profundo de las características de las estrategias de aprendizaje, dichas características coinciden con las características del aprendizaje por proyectos desde la socioformación. Estos autores dicen que, al realizarse un análisis de materiales escritos, de índole científica, existe un desarrollo en el aprendizaje estratégico; en la educación se persigue precisamente este tipo de aprendizajes, donde los alumnos se vuelvan autónomos, independientes y autorregulados, capaces de aprender a aprender. Estas estrategias de aprendizaje son procedimientos llevados a cabo mediante varias actividades que pueden incluir diferentes técnicas y se realizan con flexibilidad, persiguen un determinado propósito y aprendizaje al resolverse problemas del contexto, seleccionando entre varios recursos y capacidades, gestionando el conocimiento.

***Caracterización de aprendizaje por proyectos desde la socioformación***

La realización de proyectos socioformativos, propuesta de Sergio Tobón en los años 90´s, deben tomar en cuenta a los estudiantes, directivos, padres de familia, docentes y sociedad en general, con el fin de desarrollar un espíritu emprendedor, adquirir las competencias necesarias para afrontar retos del contexto, trabajando en un ambiente de colaboración, y un sólido proyecto ético de vida. Esta estrategia está vinculada con el enfoque constructivista, las competencias, el pensamiento complejo, involucrándose con la sociedad del conocimiento. El abordaje de problemas del contexto por medio de proyectos centrando la actuación de manera integral y desde un proyecto ético de vida es lo que hace distinguir al trabajo por proyectos con un enfoque educativo desde la socioformación (Tobón, 2013a).

La propuesta de trabajo por parte de Tobón (2018) sobre la realización de proyectos con enfoque socioformativo se basa en los trabajos de Kilpatrick y el desarrollo de competencias orientado al pensamiento complejo. Estos proyectos se caracterizan por tener cuatro metas claves: 1) formar y consolidar el proyecto ético de vida, 2) tener emprendimiento, 3) desarrollo de competencias para enfrentar los retos y situaciones del contexto y 4) trabajar de manera colaborativa. En el enfoque socioformativo es muy importante tener un desempeño con metacognición e idoneidad. La metacognición es tomar consciencia de los errores cometidos y llevar a cabo un proceso de mejoramiento continuo por medio de reflexiones y aplicación de los valores como son: responsabilidad, respeto, honestidad, equidad, solidaridad, entre otros. La idoneidad es la actuación en la realización de las actividades y abordaje de problemas cumpliendo los criterios de calidad según el contexto en que se está actuando (Tobón, 2013a).

### *Diferenciación de aprendizaje por proyectos desde la socioformación*

El aprendizaje basado en proyectos tiene relación con el aprendizaje basado en problemas. Ambas estrategias didácticas tienen como objetivo que los alumnos trabajen de manera colaborativa, pues el compromiso que adquieren es encontrar respuesta a problemas que se les planteen. La principal diferencia es que el aprendizaje basado en problemas se centra en el proceso de aprendizaje y el aprendizaje basado en proyectos se obtiene un producto final que será la evidencia de los aprendizajes adquiridos por parte de los alumnos y con él se fomenta el aprendizaje autorregulado. Por otro lado, las ventajas que el aprendizaje basado en proyectos proporciona es la adquisición de conocimientos mediante experiencias, reflexiones y compromiso consciente. Wrigley (2007) en Kokotsaki, Menzies, Wiggins, (2016) menciona cinco características principales de los proyectos: Centralidad, planteamiento de preguntas guías, investigaciones constructivas, autonomía y realismo (Kokotsaki, Menzies & Wiggins, 2016).

***División o Clasificación de aprendizaje por proyectos desde la socioformación***

Se realiza un análisis personal entre las divisiones que Tobón (2018) aborda en el e-book llamado "Cartografía Conceptual de los proyectos formativos" y las características de los niveles de transversalidad que aborda Tobón, (2013) en su artículo llamado "Los proyectos formativos: transversalidad y desarrollo de competencias para la sociedad del conocimiento", para hacer una división o clasificación del concepto de aprendizaje por proyectos desde la socioformación. La clasificación se realiza en función del abordaje de las áreas de conocimiento por:

1. Por tema: El proyecto se centra en abordar un tema relevante a nivel social, por ejemplo, la violencia, alcoholismo, contaminación, educación en México, etc.
2. Por competencias vinculadas a una disciplina: Se aborda al menos una competencia genérica y una competencia específica o básica. Por ejemplo, en matemáticas obtener un modelo matemático que represente el crecimiento de colonias de una bacteria.
3. Multidisciplinar: en este tipo de proyectos se centra en al menos dos asignaturas o áreas de conocimiento articuladas entre ellas, por ejemplo, en matemáticas obtener un modelo matemático que represente el crecimiento del número de cierta bacteria, y analizar las repercusiones que tiene en el cuerpo humano si es que llegara a cierta cantidad.
4. Interdisciplinares: en este tipo de proyectos se centra en al menos dos asignaturas o áreas de conocimiento articuladas entre ellas, utilizando

contribuciones conceptuales y metodológicos, pero teniendo algunos límites entre las asignaturas vinculadas.

5. Transdisciplinares: Se realizan proyectos integrativos que aborden varias competencias, con pérdidas de límites entre asignaturas y áreas de conocimiento. La evaluación se hace totalmente con los productos del proyecto. Se sigue un enfoque transdisciplinario donde se construye un modelo teórico-metodológico, integrando contribuciones teóricas y metodológicas de las disciplinas que intervienen.

## Desarrollo

### *Metodología*

Se implementó un estudio cualitativo basado en el análisis documental en torno al concepto aprendizaje por proyectos a partir de la socioformación. El análisis documental consiste en buscar, seleccionar, organizar y analizar un conjunto de materiales escritos con respecto al tema. En el presente estudio se analizaron una serie de documentos en torno al tema de aprendizaje por proyectos desde la socioformación centrados en la perspectiva de las estrategias didácticas, con la herramienta "Google Académico" y otros materiales complementarios.

### *Técnica de análisis*

Se aplicó la cartografía conceptual, la cual es propuesta por el enfoque socioformativo (Tobón, 2012), esta estrategia es usada para sistematizar, construir, comunicar y aprender conceptos académicos altamente relevantes, tomando como base fuentes primarias y secundarias y siguiendo los ocho ejes con sus correspondientes preguntas centrales básicas. Estos ejes y preguntas se describen en el Tabla 1.

Tabla 1

*Ejes de la Cartografía Conceptual*

| Eje | Pregunta central |
|---|---|

| | |
|---|---|
| Noción | ¿Cuál es la etimología, desarrollo histórico y definición típica de aprendizaje por proyectos desde la socioformación? |
| Categorización | ¿A qué categoría (o clase) mayor pertenece el concepto de aprendizaje por proyectos desde la socioformación? |
| Caracterización | ¿Cuáles son las características centrales del concepto aprendizaje por proyectos desde la socioformación? |
| Diferenciación | ¿De cuáles otros conceptos cercanos y que estén en la misma categoría se diferencia el concepto de aprendizaje por proyectos desde la socioformación? |
| División | ¿En qué subclases o tipos se clasifica el concepto de aprendizaje por proyectos desde la socioformación? |
| Vinculación | ¿Cómo se vincula el aprendizaje por proyectos desde la socioformación con determinadas teorías, procesos socio-culturales y referentes epistemológicos? |
| Metodología | ¿Cuáles son los elementos metodológicos mínimos que implica el abordaje del aprendizaje por proyectos desde la socioformación? |
| Ejemplificación | ¿Cuál podría ser un ejemplo relevante y pertinente de aplicación del concepto de aprendizaje por proyectos desde la socioformación? |

*Nota*. Adaptado de “Manual de Cartografía Conceptual”, por S. Tobón, 2015, CIFE, p. 7

***Vinculación de aprendizaje por proyectos desde la socioformación***

La sociedad de la información está caracterizada por buscar información y datos, organizarlos, almacenarlos y aplicaros en diferentes situaciones de la vida. Pero el reto es llegar hasta la llamada gestión del conocimiento, en esta fase lo más importante es saber utilizar el conocimiento para dar solución a problemas o situaciones del contexto de manera colaborativa, sistemática y ética, buscando el bienestar de las personas y la sustentabilidad ambiental. A su vez, la sociedad del conocimiento genera saberes para innovar los procesos humanos (Guzmán, Hernández, Cardona & Tobón, 2015). La conjunción de la gestión del conocimiento y la sociedad del conocimiento nos permite generar saberes para innovar los procesos humanos.

La gestión del conocimiento garantiza una selección de fuentes de información confiables, para poder dar solución a los problemas del contexto y llevar a cabo la implementación de ellas, esto permite que el aprendizaje sea continuo y utilizando la metacognición. Las sociedades del conocimiento identifican problemas, buscan fuentes pertinentes, organizan y procesan el conocimiento, realizan adaptaciones en el conocimiento, crean e innovan el conocimiento, aplican el conocimiento en la resolución de problemas, trabajan de manera colaborativa, buscan comprender las situaciones en su multidimensionalidad a través de articulaciones de diversas áreas de conocimiento, el uso de las tecnologías de información y comunicación que permiten participar en redes sociales, comunicación, intercambio de información, entre otros (Guzmán, Hernández, Cardona & Tobón, 2015).

Mediante los proyectos socioformativos se logra que los alumnos lleven a cabo vinculaciones con al menos dos áreas de conocimiento, pues los alumnos identifican problemas del contexto, lo interpretan, argumentan y proponen soluciones, con ello puede facilitar las relaciones entre disciplinas y el trabajo se desarrolle de manera integral, permitiendo tener mayor impacto y trascendencia del producto final~~.~~ (Tobón, 2013a).

### *Metodología de Aplicación de aprendizaje por proyectos desde la socioformación*

La construcción de los proyectos con enfoque socioformativo es una estrategia que consiste en realizar un conjunto de actividades que resuelvan al menos un problema del contexto (personal, familiar, social, laboral-profesional, ambiental-ecológico, cultural, científico, artístico, recreativo, deportivo, etc.), buscando la formación de por lo menos una competencia y logrando obtener un producto final como evidencia del aprendizaje adquirido~~.~~ (Tobón, 2013a).

A continuación, se describen los ejes metodológicos para la realización de los proyectos abordados desde la socioformación, permitiendo así la construcción de esta estrategia didáctica y el proceso de investigación que se llevará a cabo. Aunque el propósito no es determinar el orden de los elementos metodológicos en su diseño, se presentan los ejes metodológicos mínimos para la elaboración del proyecto, que los autores han implementado como resultado de la experiencia como docentes. (Bermeo, Hernández & Tobón, 2016).

La descripción se basa en la metodología realizada en Bermeo, Hernández & Tobón, (2016) y Guzmán, Hernández, Cardona & Tobón, (2015).

1. Identificación del problema: Se identifica una necesidad, dificultad o vacío de algún conocimiento dentro del área disciplinar o en el contexto de los estudiantes, la institución o la comunidad (personal, familiar, social, laboral-profesional, ambiental-ecológico, cultural, científico, artístico, recreativo, deportivo, etc.). Establecer una meta o propósito que se pretende alcanzar el análisis conceptual y metodológico mediante la UVE heurística socioformativa propuesta por Tobón, (2013) y analizada por Bermeo, Hernández & Tobón, (2016)
2. Recuperación de saberes previos: Al plantear el problema del contexto que se va a abordar, el alumno recuperara las herramientas, conceptos, definiciones, teorías, del área disciplinar que se esté abordando y de otras áreas disciplinares que pueden ser vinculadas para la resolución del problema.
3. Gestión del conocimiento: A partir de la identificación del problema el alumno busca información en diferentes medios como son: internet, libros, manuales, periódicos, revistas, etc. Que cumplan con los requerimientos mínimos necesarios para que extraigan información de calidad.
4. Procesar y co-construir el conocimiento: El alumno organiza, selecciona, comprende y adapta los conceptos, definiciones, teorías mediante el empleo de alguna estrategia como es la cartografía conceptual propuesta por Tobón, (2012).
5. Planteamiento del procedimiento de resolución del problema: Se lleva a cabo la identificación, análisis, interpretación, argumentación y aplicación de los conocimientos. Se lleva a cabo un análisis de la relación que existe entre los datos, se analizan los conceptos, definiciones, teoremas, axiomas, etc. Que puedan ser usados para la

resolución del problema de manera parcial o total. El desarrollo del proyecto se realiza de manera detallada, justificada y lógica. Se describen las propuestas de solución al problema planteado de forma clara.

a) Se seleccionan las mejores propuestas de solución
b) Se implementa la metacognición.
c) Se eliminan errores
d) Se verifican las respuestas
e) Se evalúa y se concluye la resolución del problema

6. Trabajar de forma colaborativa: Es importante trabajar desde el inicio con personas que tienen los mismos intereses, motivaciones, intensiones, metas, objetivos. Las personas que participan no necesariamente deben pertenecer a compañeros del mismo grupo, pueden participar expertos, directivos, padres de familia, integrantes de la sociedad, contactados de manera personal o por redes sociales. Elaborando documentos colaborativos en línea.
7. Actuando con ética: Aplicar los valores universales para resolver con responsabilidad, honestidad, respeto, equidad, solidaridad, entre otros, el problema del contexto planteado. Reflexionar y Considerar las consecuencias a corto, mediano y largo plazo de un determinado análisis, evitando los posibles efectos negativos.
8. Socializar los saberes y experiencias: El impacto que se tiene al responder a las necesidades sociales que existen en la actualidad no es consumada si estas respuestas no se dan a conocer, a través de internet, redes sociales, foros, blogs, entre otras. Con esta actividad la metacognición será más enriquecedora pues las mejoras se realizan mediante opiniones de muchas otras personas interesadas en el tema abordado. Y que muchas personas se beneficien con las soluciones propuestas.

### *Ejemplificación de aprendizaje por proyectos desde la socioformación*

De acuerdo con los ejes definidos en la metodología, a continuación se presenta un ejemplo de aplicación en el área de matemáticas, particularmente en el tema de Estadística Descriptiva. Ocurrió en el CECyT 6 “Miguel Othón de Mendizábal” del Instituto Politécnico Nacional. Este tema se imparte en el sexto semestre. El Nivel Medio Superior del Instituto Politécnico Nacional tiene una formación bivalente con tres ramas de conocimiento: Físico - Matemáticas, Ciencias Sociales y Administrativas y Ciencias Médico-Biológicas. Particularmente el CECyT 6 tiene como rama de conocimiento el área Médico-Biológica. A su vez se imparten las carreras siguientes carreras: Técnico en Ecología, Técnico en Enfermería, Técnico Laboratorista Químico y Técnico Laboratorista Clínico. El ejemplo que se describe fue propuesto por alumnos de la carrera de Técnico Laboratorista Clínico.

1. Identificación del problema: La diabetes en México es un problema que afecta a un gran porcentaje de las personas. Lo que identificaron los alumnos es que sus familiares que padecen de esta enfermedad no llevan un control en su alimentación y en la administración de su medicamento. Así surge la propuesta del proyecto, tomarían la cantidad de glucosa en sangre durante 80 días y llevarían un registro minucioso de los alimentos que ingiere la persona diabética. Para identificar cuáles son los alimentos que más afectan estos niveles de glucosa y hacer una dieta personalizada para que pueda el paciente llevar un control de su alimentación, mostrándole lo que sucede al ingerir ciertos alimentos.
2. Recuperación de saberes previos: Los alumnos tienen el conocimiento previo de la toma de muestra, los efectos que tienen ciertos alimentos con respecto a los niveles de glucosa, el manejo estadístico de los datos (media, mediana, moda, desviación estándar, percentiles, representaciones gráficas: histogramas, polígono de frecuencia, polígono de frecuencia acumulada (ojiva) y otros diagramas).
3. Gestión del conocimiento: Construcción de su marco teórico fundamentado en referencias científicas y actuales. Utilizaron la UVE heurística para la organización de la información.
4. Procesar y co-construir el conocimiento: Los alumnos organizaron, seleccionaron, comprendieron y adaptaron los conceptos, definiciones, teorías, y las relacionaron con los cálculos estadísticos que se realizaron.

5. Planteamiento del procedimiento de resolución del problema: Realizaron comparaciones de la información que iban recopilando con sus resultados. Analizaron el comportamiento que tenían los niveles de glucosa con los alimentos que ingería el paciente. Concluyendo que en algunos casos no coincidía lo que generalizaban en los libros con los resultados particulares del paciente.
6. Trabajar de forma colaborativa: Siempre se trabajó en equipos, cada equipo tenía a su paciente, pero entre los equipos también intercambiaban información.
7. Actuando con ética: Realizaban reflexiones de los datos obtenidos y logrando así una metacognición continua.
8. Socializar los saberes y experiencias: Al término del estudio, propusieron una dieta particular para los pacientes, exponiendo lo que obtuvieron en sus resultados.

Los alumnos aplicaron sus conocimientos de estadística, los vincularon, lograron trabajar con respeto, responsabilidad, disciplina, solidaridad, interés, haciendo propuestas para el mejoramiento de la salud de las personas. Cuando se abordan problemas donde los datos ya están recopilados, no se logra que los alumnos se involucren en un análisis de los datos obtenidos, al recopilar ellos mismos los datos y tener la responsabilidad de un paciente que se prestó a auxiliarlos tuvo un efecto positivo pues el compromiso y dedicación se potencializó.

**Aprendizajes esperados**

Cuando existe un desconocimiento de los procesos cognitivos, efectivos y meta-cognitivos implicados en el aprendizaje significativo provoca desmotivación y bajo rendimiento académico. (Díaz-Barriga & Hernández, 2002). De aquí que la aplicación correcta de las estrategias de aprendizaje como es la construcción de proyectos desde la socioformación es de suma importancia. Con la realización de proyectos desde el enfoque socioformativo se logra que los alumnos controlen su proceso de aprendizaje, estén conscientes de sus logros y de los aspectos que tienen que mejorar, comprendan la exigencia de las actividades y respondan a ellas, planifiquen sus acciones identificando dificultades, desarrollen habilidades para abordar cualquier situación, se autoevalúen y lleven a cabo mejoras en sus actividades y productos. Personas con un elevado sentido de conciencia y responsabilidad por los problemas que tienen que solucionarse en la sociedad en base a los valores universales, es decir, personas con un sólido proyecto ético de vida. (Tobón, 2013a).

Erróneamente se piensa que las matemáticas son sólo análisis de conceptos y ecuaciones, cuando no es así, el abordaje de las matemáticas nos lleva a razonar y conjeturar. Pero para que el alumno construya su conocimiento, es necesario que sea motivado por una aplicación de las matemáticas dentro de su entorno. Cuando se aplican proyectos para el aprendizaje de las matemáticas el alumno le toma un sentido positivo a su aprendizaje (Morales & García, 2015). Estos autores, mediante la integración de la práctica y la teoría, dicen haber logrado que los alumnos obtuvieran un aprendizaje significativo, además desarrollaron diversas competencias, como son el trabajo colaborativo, comunicación asertiva y fomentaron el espíritu crítico.

La estrategia didáctica de proyectos basados en la socioformación desarrolla una base de conocimientos caracterizada por profundidad y calidad, involucra a los alumnos en retos que son familiares para ellos, pues son de su mismo contexto, por lo que desarrollan iniciativa y entusiasmo, razonamiento eficaz y creativo, se lleva a cabo una metacognición constante, existe vinculación con diferentes disciplinas, se enfrentan a un conflicto cognitivo (ITESM, 2014). En el ejemplo que se desarrolló fomentó en los alumnos los siguientes aprendizajes y/o competencias: Habilidad cognitiva con pensamiento crítico y analítico. Habilidad para sintetizar, seleccionar, evaluar. Identificar una necesidad o vacío. Trabajar de manera colaborativa, con actitud colaborativa y dispuesta al intercambio y desarrollo de la solidaridad. Comprensión de los fenómenos que se presentan en su entorno. Escuchar y comunicarse de manera efectiva. Argumenta y debate diversas ideas con fundamentos sólidos. Motivación y disponibilidad para aprender diversos conocimientos. Vinculación de diferentes disciplinas. Trabajo con compromiso, responsabilidad, honestidad. Toma de decisiones, autonomía en su proceso.

## Referencias


Benítez, E. (2014). El método de proyectos. *Publicaciones didácticas.* España. 123-125

Bermeo, F., Hernández, J. & Tobón, S. (2016). Análisis documental de la v heurística mediante la cartografía conceptual. *Ra Ximhai, **vol.** 12*, 105. Recuperado de: http://www.redalyc.org/pdf/461/46148194006.pdf

Delosr, J. (1994). Los cuatro pilares de la educación, en La Educación encierra un tesoro. México: El correo de la UNESCO. 91-103

Díaz-Barriga, F. & Hernández, G. (2002). Fundamentos, adquisición y modelos de intervención. Estrategias para un aprendizaje significativo. *Estrategias para el aprendizaje significativo*. México: Mc Graw Hill. 231-249

Flores, G. & Juárez, E. (2017). Aprendizaje basado en proyectos para el desarrollo de competencias matemáticas en Bachillerato. *Revista Electrónica de investigación Educativa, vol. 19. Núm. 3*. 71-91 Recuperado de: https://redie.uabc.mx/redie/article/view/721/1551

Godino, J., Batanero, C. & Font, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Universidad de Granada y Universidad de Barcelona. España.

González, J. (2007). John Dewey y la pedagogía progresista. En *El legado pedagógico del siglo XX para la escuela del siglo XXI.* 31. Barcelona: Graó.

Dirección de Investigación y Desarrollo Educativo. ITESM. (2014) Aprendizaje Basado en Problemas. España. Recuperado de: http://www.sistema.itesm.mx/va/dide/inf-doc/estrategias/

Kokotsaki, D., Menzies, V. & Wiggins, A., (2016). Project-based learning: a review of the literatura, *Improving Schools*., 19 (3). 267-277

Morales, L. & García, O. (2015). Un aprendizaje basado en proyecto en matemáticas con alumnos de undécimo grado. *Revista didáctica de las Matemáticas.* 90. 21-30

Ortega, M., Hernández, J. & Tobón, S. (2015). *Análisis Documental de la gestión del conocimiento mediante la cartografía conceptual*. 11. 141-160

Parejo, J. (2014). La pedagogía por proyectos: Clarificación Conceptual e

Implicaciones prácticas. *3rd Multidisciplinary International Conference on Educational.* Research. Recuperado de: http://amieedu.org/actascimie14/wp-content/uploads/2015/02/parejo.pdf

Rueda, M. (2011). *La investigación educativa y las decisiones interactivas en las aulas. Scielo*. 33. 132.

Tobón, Sergio (2004). Islas Baleares (España). Ciber Educa.com Psicólogos y Pedagogos al servicio de la educación.

Tobón, S. (2005). *Formación basada en competencias*. *Pensamiento complejo, diseño curricular y didáctica*, 2 ed. Bogotá: ECOE Ediciones.

Tobón, S. & Núñez R., A. C. (2006). “La gestión del conocimiento desde el pensamiento complejo: un compromiso ético con el desarrollo humano”. *Revista Escuela de Administración de Negocios*. 58. 27-39.

Tobón, S. (2012). Cartografía Conceptual: Estrategia para la formación y evaluación de conceptos y teorías. México: CIFE. Biblioteca Digital CIFE

Tobón, S. (2013). Aplicación de la UVE heurística desde la socioformación. México: Biblioteca Digital CIFE

Tobón, S. (2018). Cartografía Conceptual de los Proyectos Formativos. México: Biblioteca Digital CIFE.

Visbal, D., Mendoza, A. & Díaz, S. (2017). Estrategias de aprendizaje en la Educación superior. *Sophia.* 13. 2.

# Novísimo Detector de Radiación Basado en Metal

Julián Félix[51]
felix@fisica.ugto.mx

## Resumen

A pesar de los avances en los detectores de radiación ionizante, no hay, hasta ahora reportados, detectores de radiación ionizante basados en metales. Se presenta el diseño, la construcción, la caracterización, y operación de un novísimo detector de radiación ionizante, basado en una placa de Aluminio de 10 cm x 10 cm x 0.5 cm. Cuando este detector es expuesto a la radiación natural, rayos cósmicos, en posición horizontal, con un campo eléctrico entre 0 Vcd/cm y 5000 Vcd/cm, no se detectan pulsos (o disparos); los pulsos empiezan a aparecer arriba de los 5000 Vcd/cm, con un trigger de 30 mVcd en el osciloscopio. Este detector de radiación ionizante fue probado extensamente para eliminar toda posibilidad del origen de estos pulsos aleatorios que no fueran los rayos cósmicos. Toda la información colectada es consistente con que los pulsos observados se producen por incidencia de rayos cósmicos. Luego ésta es una técnica novísima basada en metales para detectar radiación ionizante, en particular para detectar rayos cósmicos.

## Palabras claves

Rayos cósmicos, detectores, metales, iones, alto voltaje, osciloscopio.

## Introducción

Hay muchas clases de detectores de radiación publicadas. Estos detectores se basan en casi todas las clases de materiales disponibles y sus fases de estado físico (Sauli, 1993, 1994; Charpak, 1992; Tanabashi, 2018). Sin embargo, a pesar de estos desarrollos, no hay, hasta ahora publicados, detectores de radiación basados en metales de ningún tipo ni en ninguna de sus fases físicas. Aquí se propone, y se demuestra un detector basado en metal; éste es un novísimo detector construido con una placa de Aluminio maquinada de 10 cm x 10 cm x 0.5 cm, con la electrónica básica apropiada, en la etapa de prototipo. Ver Figura 1, para el esquema básico propuesto.

[51] Laboratorio de Partículas Elementales, División de Ciencias e Ingenierías, Campus León. Universidad de Guanajuato. http://laboratoriodeparticulaselementales.blogspot.mx

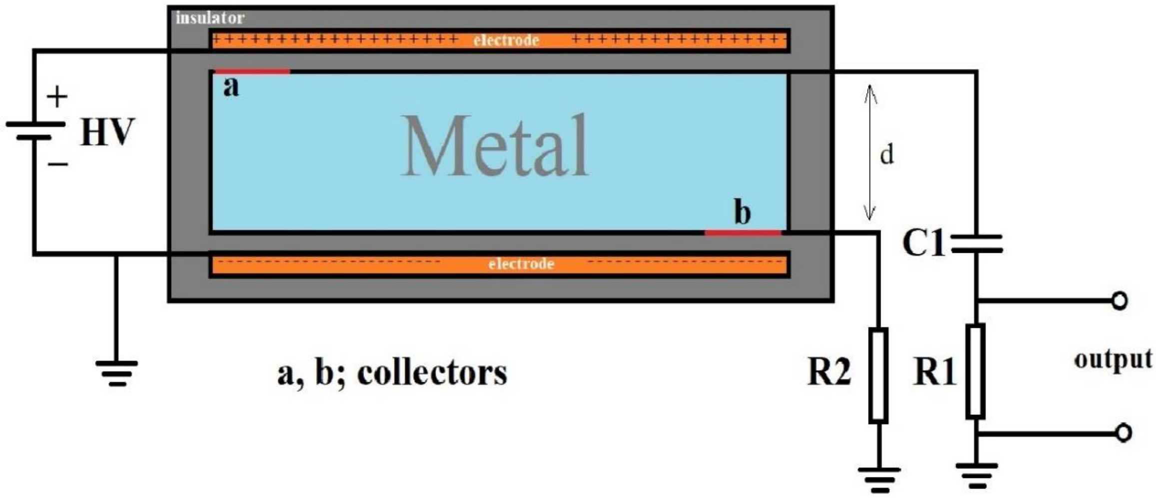



Figura 1. Esquema del detector de radiación basado en una placa de Aluminio de 10 cm x 10 cm x 0.5 cm; éste es un detector basado en un gas de electrones, metal. No está a escala. Es para ilustración solamente. La propuesta en novísima y original. Las dimensiones no son absolutas, prácticamente de cualquier dimensión puede funcionar.

Éste tiene dos colectores hechos con cinta de Cobre autoadheribile, de 11 cm de largo, 0.6 cm de ancho, y 0.00254 cm de espesor, colocados en las caras opuestas grandes del detector. La primera capa es eléctricamente aislada con cinta de aislar negra, 3M scotchrap, de 0.0254 cm de espesor (o película autoadheribile de PVB); el circuito electrónico mínimo para leer las señales eléctricas es conectado a los colectores -a un colector se conecta un capacitor, C1, en serie con la resistencia eléctrica, R1, y se conecta a tierra, y al segundo colector se conecta otra resistencia eléctrica, R2, y se conecta a tierra; los valores son apropiados para acoplar e igualar la impedancia del detector y la del osciloscopio-; la señal del detector es leída en R1 usando un osciloscopio Tektronix TDS 3034B de cuatro canales, color, digital a fósforo e*, a 300 MHz (2.5 GS/s) DPO, u cualquiera otro similar. Un par de electrodos de Cobre de 10 cm x 10 cm, 0.0254 cm de espesor (o construidos sobre placa electrónicas fenólicas), es colocado en paralelo a las superficies de 10 cm x 10 cm del detector que están eléctricamente aisladas; ahí es donde un alto voltaje directo (0 Vdc a 3000 Vdc) es aplicado usando una fuente de voltaje DC calibrado (Fermilab power supply Model 1570 1-3012V, 40 mA, high voltage calibrated DC power source; power designs Inc. Westbury, NY, Palo Alto California). El detector completo, en estado prototipo, es eléctricamente aislado, compactado, montado, y operado horizontalmente en una placa protoboard, sin soldar (o sobre las mismas placas fenólicas). Figura 2.

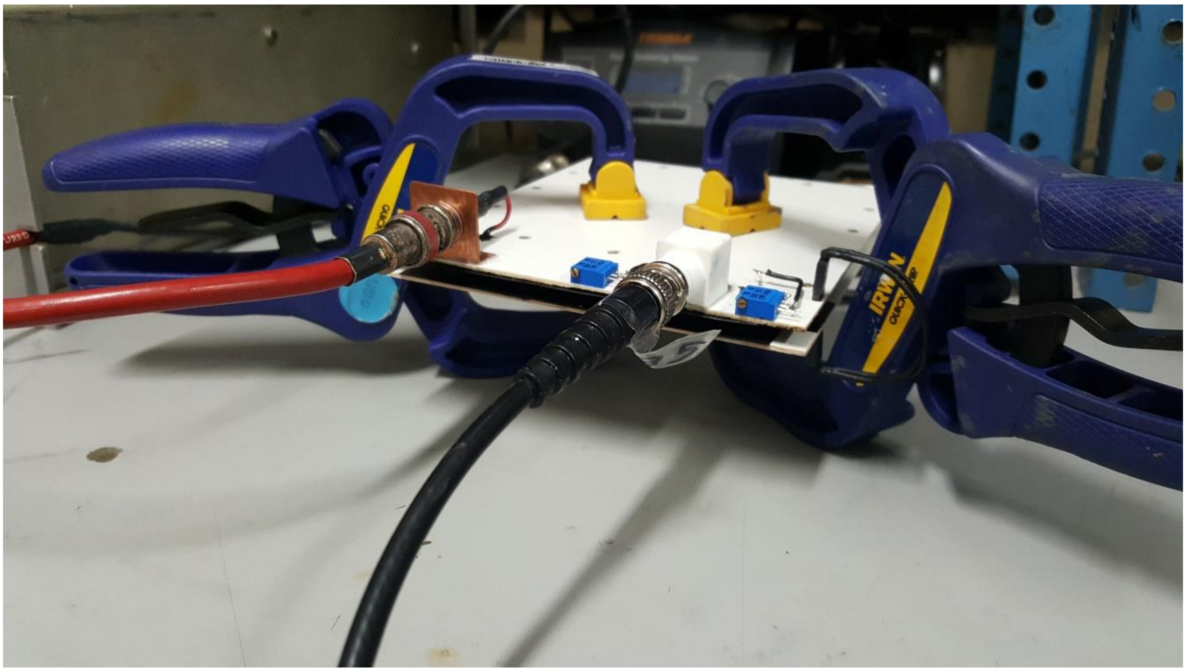



Figura 2. Configuración final y conectores eléctricos para operar el detector de radiación basado en Aluminio. Fase de operación en forma de prototipo.

En este desarrollo han participado varios estudiantes de licenciatura y posgrado en física. Presento sólo las bases y la idea original. Es un ejemplo de lo que un(a) estudiante de física, con la guía y acompañamiento propios del mentor(a), puede lograr. Un ejemplo de la física como la base de todas las ingenierías, de los desarrollos tecnológicos, y de todas las ciencias naturales.

## Marco Teórico

Este trabajo está en la fase experimental. No proponemos todavía una forma de explicar las observaciones obtenidas porque quizá no tenemos todas las evidencias experimentales. Los principios de la electrodinámica clásica se cumplen. El campo eléctrico y el gas de electrones funcionan como amplificadores de las señales eléctricas (iones) producidas. El sistema RC sirve como colector de toda la carga eléctrica producida en cada evento, incidencia de partícula ionizante.

Muchos estudios se están haciendo como función de los parámetros siguientes: tipo de metal, espesor, pureza, energía de ionización del metal, características eléctricas de los aislantes, etc. Este trabajo es un avance de resultados, y tiene fines de enseñanza; mostrar que los avances tecnológicos tienen su origen en la ciencia básica como la física.

## Metodología

Esta, no tan simple u obvia, herramienta funciona como un detector de radiación en general, y como un detector de radiación cósmica en particular. Muchas pruebas fueron realizadas para estudiar su operación y la forma en que éste detecta radiación.

Altos voltajes (HV) de 0 Vcd a 2500 Vcd fueron aplicados incrementando valores de 100 Vcd en 100 Vcd.

Cuando los voltajes altos aplicados estuvieron por debajo de los |±2000| Vcd no se produjeron señales (disparos) de ninguna clase, con el nivel de disparo de 30 mVcd en el osciloscopio, y monitoreando por más de una hora; para voltajes por arriba de |±2000| Vcd, algunas señales (disparos) ocasionales se produjeron: con valores negativos para altos voltajes negativos, y con valores positivos para altos voltajes positivos aplicados. Las señales (disparos) son producidas al azar en las amplitudes y en las apariciones, con casi el mismo tiempo de bajada y de subida. A estos voltajes, señales típicas tienen amplitudes de |± 100| mVcd, con 10 mVpp de ruido electrónico y con |± 30| mVcd de trigger (disparo) en el osciloscopio. A voltajes mayores las amplitudes de las señales son mayores, ver Figura 3 para un ejemplo de señal con voltajes positivo; y Figura 4 para un ejemplo de señal obtenida con voltaje negativo. Las formas de estos disparos son perfectamente distinguibles de las señales de ruido de la fuente eléctrica, que se mantiene alrededor de los 10 mVpp.

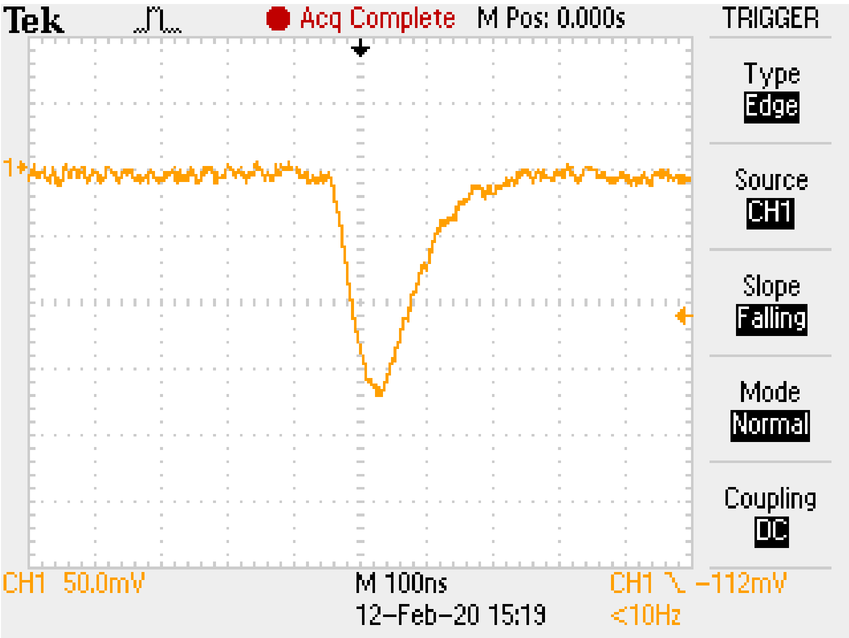



Figura 3. Señal típica (disparo o trigger) producida con voltajes altos positivos. Tiempo de subida del orden de 60 ns, tiempo de bajada cerca de 100 ns.

El proceso de incrementar el voltaje aplicado en paso de 100 Vcd en 100 Vcd fue suspendido a |± 2 900 | Vcd, porque las señales obtenidas resultaban de amplitud muy grande. No se requieren circuitos electrónicos amplificadores, y tampoco altos voltajes.

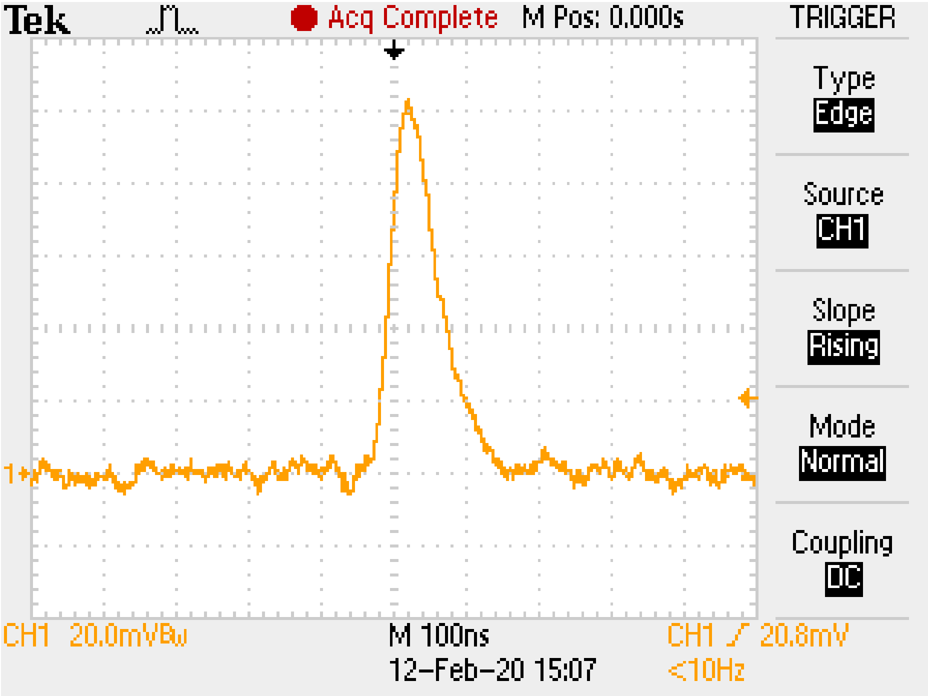



Figura 4. Señal típica (disparo o trigger) producida con voltajes altos negativos. Tiempo de subida del orden de 20 ns, tiempo de bajada cerca de 130 ns.

## Resultados

Para probar y demostrar la forma en que este detector funciona, algunas pruebas fueron realizadas, y los siguientes resultados fueron obtenidos:

1. Sin aplicar altos voltajes no se producen disparos de ninguna clase, sin embargo, señales de ruido aparecen de tiempo en tiempo.
2. La estabilidad del detector fue probada continuamente por más de 15 horas. Durante este periodo el detector disparó (se obtuvieron triggers, o señales) sin interrupción, a altos voltajes por arriba de | ±2 500| Vcd y |±30| mVcd de trigger en el osciloscopio. No se observaron chispas u otras mal funciones en el detector. El aislante eléctrico funciona bien.
3. Cuando el alto voltaje es incrementado, en valor absoluto, aparece un periodo de inestabilidad, el detector dispara muy rápido, con amplitud y ocurrencia al azar. Después de un minuto, aproximadamente, el detector se estabiliza y dispara regularmente; las señales en el osciloscopio se ven con amplitud y aparición al azar. Esto significa que la aparición de señales está relacionada con la perturbación momentánea (incrementos) del campo eléctrico externo aplicado. Este efecto no es observado cuando el alto voltaje es decrecido, en valor absoluto, meramente la amplitud del disparo decrece.
4. Cuando el detector fue enteramente cubierto con una hoja de Aluminio de 0.00254 cm de espesor, tipo comercial, para protegerlo de la radiación

luminosa externa, los pulsos, o triggers, permanecieron sin cambios y sin interrupciones. Esto significa que los triggers (o disparos) son producidos dentro de la placa de Aluminio, no como una consecuencia de inducción electromagnética sobre los circuitos electrónicos.

5. La placa de Aluminio del detector de radiación fue directamente calentada usando una fuente de aire caliente, como las comúnmente usadas para desoldar componentes electrónicos, empezando desde la temperatura ambiente (cerca de 15 °C) hasta cerca de 80 °C. Los triggers (o disparos) detectados se incrementaron dramáticamente y azarosamente, en la amplitud y en la razón de aparición. Cuando el detector fue libremente enfriado, hasta la temperatura ambiente, el triggereo (o disparos) se redujo a la actividad inicial. Cuando la placa metálica se enfrió, usando gel a -2 °C, el triggereo (o disparos) se redujo notoriamente en la amplitud y en la frecuencia de aparición. Estos hechos son interpretados en el sentido que la actividad eléctrica (movimiento de iones) dentro de la placa metálica -con el campo eléctrico interno- es la causa de las señales (triggers) detectadas; y que muchas de las señales detectadas son producidas por fluctuaciones térmicas de la placa metálica, pero también por el paso de las partículas de la radiación incidente que por algunos nanosegundos perturba el campo eléctrico interno. Ningún detector de radiación es 100% libre de efectos térmicos, o efectos cuánticos; este detector en discusión no es la excepción. Algunas de las señales detectadas son originadas por la incidencia de partículas de los rayos cósmicos.
6. Una fuente muy débil de rayos gamma (del orden de 1 micro Curie, $^{241}$Am) fue aplicada en la parte superior de la placa de Aluminio. No se observó modificación significativa en la razón de triggereo (o disparos). Normalmente el osciloscopio es muy lento para detectar los triggereos rápidos, si es que alguno fue producido por esta fuente débil de radiación.
7. En el prototipo detector de radiación sin conectar los componentes R1C1 y R2, un electroscopio, construido exprofeso, fue conectado al punto (a) o (b) del detector, Figura 1. Sin el alto voltaje aplicado no se detectaron cargas eléctricas, porque la placa metálica es neutra en general. Cuando el alto voltaje es aplicado, ya sea positivo o negativo, algunas cargas eléctricas son detectadas; el valor numérico depende del alto voltaje aplicado; mientras más alto el voltaje aplicado, más alta es la concentración de carga observada en cualquier punto, ya sea (a) o (b). Estas mediciones significan que hay una polarización eléctrica de la placa metálica, una separación espacial de las cargas eléctricas que crean un campo eléctrico interno que compensa el campo eléctrico externo, generado por el alto voltaje aplicado; estas mediciones son predichas por el principio de Coulomb en electrostática elemental.
8. Cuando los componentes R1C1 y R2 son reconectados, y el electroscopio casero es reconectado a los puntos (a) y (b) del detector de Aluminio, no se detectan cargas eléctricas, aun si el alto voltaje es aplicado hasta |± 2 900| Vcd. Cuando el sistema detector es aterrizado, dentro de éste debe de ser eléctricamente neutro y sin ninguna polarización eléctrica. Por lo

tanto, debe de haber un campo eléctrico dentro del metal, que se corresponde exactamente con el campo eléctrico externo originado por el alto voltaje eléctrico aplicado. Este campo eléctrico originado externamente dentro de la placa metálica, después de anularse o aterrizarse el campo eléctrico de polarización, es la clave de operación de este detector de radiación basado en metal. Por este campo eléctrico, la señal producida por la partícula incidente (uno o varios iones negativos) es amplificada hasta niveles medibles.

9. Detectores similares fueron construidos basados en Fe, Cu, Pb. En todos se observó un triggereo (disparos o señales) similares. Esto significa que la placa metálica es fundamental para la operación del detector de radiación presente.
10. Un detector similar fue construido con placa de acrílico de 10 cm x 10 cm x 0.5 cm. Las amplitudes de las señales fueron consistentes con 0 mVcd, a altos voltajes desde 0 Vcd hasta |±2 900 | Vcd. Triggers muy raros y de amplitud muy pequeña, cerca de |± 120 | mV de amplitud, con la forma característica de la descarga RC, a voltajes cerca de |±3 000| Vcd, fueron obtenidos. Estos hechos son interpretados como que la placa de metal (Aluminio) es fundamental para generar las amplitudes grandes de las señales generadas (triggers); con una placa altamente resistiva (acrílico) los triggers (señales) tienen una amplitud muy baja. De esta experiencia, placas de acrílico pueden ser usadas directamente para detectar radiación en general, o rayos cósmicos en particular, pero las placas metálicas son mucho mejores para detectar radiación ionizante y rayos cósmicos.
11. Dos detectores iguales fueron operados, horizontalmente, apilados, y al mismo voltaje aplicado. Muchos triggeres (disparos o señales) se produjeron y registraron, dentro de un tiempo de 1 ns; otros muchos triggers (disparos o señales) no fueron producidos dentro de este período, claramente producidos uno después del otro algunas veces con un tiempo de diferencia de más de un segundo en el tiempo de arribo. Esta información es consistente con que partículas de radiación ionizante cruzaban ambos detectores e interactuaban con los detectores a base de metal, dejando algunas trazas de átomos ionizados dentro de los detectores, que originaban los triggers (o disparos) en cada detector. Dos triggers (señales) simultáneas son usadas para definir un rayo cósmico. Esto es, los rayos cósmicos son detectados por este detector basado en Aluminio.

## Conclusiones

De los hechos experimentales arriba descritos, las señales detectadas no son espurias u originadas de la línea eléctrica, o fuente de poder, o de algún otro origen. Los triggers (señales) son originadas por perturbaciones del campo eléctrico dentro del metal, ya sea por la incidencia de las partículas de los rayos cósmicos o por fluctuaciones térmicas. Muchas de las fluctuaciones térmicas pueden ser eliminadas, y las producidas por el cruce de partículas cósmicas pueden ser seleccionadas usando la técnica de coincidencias.

Este detector a base de Aluminio tiene la siguiente forma plausible de operación: partículas incidentes, rayos cósmicos, ionizan los átomos metálicos a lo largo de su trayectoria a través del metal; por el campo eléctrico externamente aplicado estos electrones son acelerados, ganan energía y crean más iones; una avalancha de electrones es originada, con el circuito R1C1 la señal del electrón es colectada para ser detectada como un trigger o disparo.

Este detector de radiación basado en Aluminio tiene algunas ventajas sobre los detectores de radiación convencionales: como la energía de ionización del Argón líquido es 26.4 eV, y la energía de ionización del Aluminio es 5.99 eV (Tanabashi, 2018), el detector basado en Aluminio, u otro metal, puede ser un mejor detector de radiación, especialmente de radiación de baja intensidad o radiación poco interactuante, porque el Aluminio es dos veces más denso que el Argón líquido y más de dos mil veces que el gas Argón. En particular este detector de radiación tiene muchas ventajas con respecto a detectores convencionales como la cámara de placas paralelas resistivas, o con respecto a la cámara multi alámbrica proporcional, o detectores similares: Es muy simple de construir y mantener, es barato, no tiene problemas del gas, es seguro, no tiene problemas de envejecimiento, es muy simple, no requiere circuitos electrónicos amplificadores, no requiere de altos voltajes, es denso, es más apropiado para detectar radiación de baja intensidad o radiación poco interactuante como neutrinos o rayos cósmicos.

Esta clase de detector de radiación podría ser mejorada explotando las propiedades de los metales como la alta conductividad eléctrica, la alta densidad, etc.; por ejemplo, éste podría ser eficiente donde instrumentos rápidos, y altamente densos, se requieren, como en la detección de neutrinos, etc., incluso podría ser la base para construir detectores gigantes de neutrinos.

Por todo lo anteriormente establecido, éste es un detector novísimo basado en metales, con muchas ventajas sobre otros detectores de radiación ionizante tradicionalmente usados. Las posibilidades tecnológicas son inmensas. Muchos desarrollos están en proceso de elaboración.

## Agradecimientos

Proyecto CONACyT, México. Fondo I0017, Fondo SEP-CONACyT, solicitud 000000000223179. DAIP, programa de apoyo a profesores 2016-2017, 2018, 2019, Universidad de Guanajuato.

## Referencias

Sauli, F (Editor) (1993). Instrumentation in High Energy Physics. Advanced Series on Directions in High Energy Physics, World Scientific, volumen 9, número 1, páginas 583, año1993, doi.

Sauli, F (1994). Gaseous Radiation Detectors, Fundamentals and Application. Cambridge Monographs on Particle physics, Nuclear Physics and Cosmology. Cambridge Monographs, volumen 1, páginas 487, año 2014, doi.

Charpak, G. (1992). Electronic Imaging of Ionizing Radiation with Limited Avalanches in Gases. https://www.nobelprize.org/uploads/2018/06/charpak-lecture.pdf. volumen 1, páginas 13, año1992, doi.

Tanabashi, M (2018). Review of Particle Physics. Phys. Rev. D, volumen 98, páginas 1898, 2018, doi 10.1103/PhysRevD.98.03000.

# La enseñanza de conceptos físicos fundamentales: importancia de su surgimiento histórico

J. Avendaño[52], Leonor Pérez-Trejo[52]
leopt@esfm.ipn.mx

## Resumen

En las ciencias duras existen conceptos que han requerido no uno ni dos, sino incluso un par de cientos de años para quedar bien establecidos. Durante todos estos años, han sido construidos, modificados, destruidos, vueltos a construir, es decir, todo un proceso de temple de poco en poco en las mentes de poderosos pensadores, donde el contexto histórico va jugando un papel primordial. ¿Cómo pretender que alumnos sin experiencia puedan aprehender estos conceptos dándoles una simple definición? La experiencia docente nos ha enseñado a lo largo de ya varios años, que los alumnos llegan a capturar de una mejor manera la esencia del concepto si durante su explicación, ésta va acompañada del contexto histórico, es decir, de aquellas dificultades fundamentales que tuvo que solventar para quedar suficientemente bien establecido. En este trabajo se presenta un ejemplo, la enseñanza del concepto de onda de materia.

## Objetivo

Que el estudiante de Física comprenda los conceptos a través de conocer por qué y cómo surgieron, en qué condiciones y el contexto de la época en la que surgieron de tal manera que también aparten esas ideas simplistas y utópicas sobre la metodología científica que pudieran llegar a tener.

## Marco teórico

La mayoría de los libros de texto sólo muestran hechos y métodos para resolver problemas, sin embargo, enseñar ciencias es más que enseñar conceptos y teorías acabadas (García, 2009) por lo que una estrategia para la enseñanza de las ciencias es utilizar la historia de la ciencia. La historia como herramienta en la enseñanza de la ciencia ayuda a (Perea y Buteler, 2016): introducir temas o conceptos y detectar los preconceptos que tienen los estudiantes, puede tomarse como criterio para organizar una unidad didáctica, ilustrar un contenido, motivar a los estudiantes generando discusiones sobre las teorías en cuestión, facilita la compresión de la evolución de un concepto científico. Es en el sentido, de facilitar la comprensión del concepto de onda de materia que en el presente trabajo se hace la propuesta que se describe a continuación.

[52] Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Física y Matemáticas, Depto. de Física.

## Desarrollo

Recordemos que el objetivo es enseñar el concepto de onda de materia, nos basaremos en el discurso que Louis de Broglie dio al recibir el Premio Nobel (1929). Se sugiere utilizar una línea de tiempo que empiece con lo que se sabía de la naturaleza de la luz antes de los resultados sobre radiación de cuerpo negro obtenidos por Planck, alrededor del año 1900, y que siga hasta que en el año 1924 L. de Broglie propone este concepto. En la figura 1 se muestra la línea de tiempo que incluye los principales resultados, y los científicos involucrados en su obtención, que permitieron finalmente a L. de Broglie construir el concepto de onda de materia.

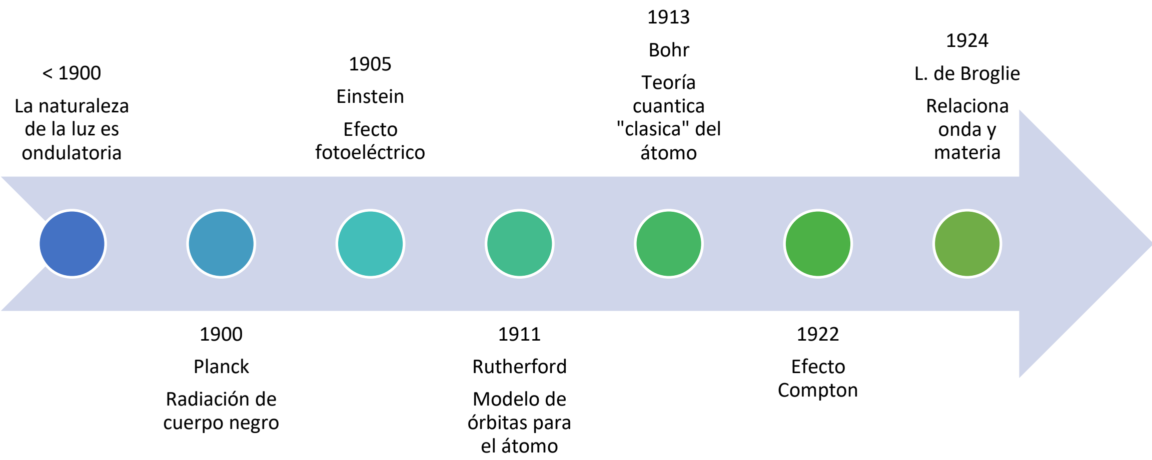



Fig. 1. Línea de tiempo de eventos destacados que sirvieron para dilucidar el concepto de onda de materia.

Es importante que quien vaya a explicar este tema, es decir el profesor, tenga un amplio conocimiento de la historia del nacimiento de la teoría cuántica para que pueda resolver inquietudes de los estudiantes e imprimir su sello personal en la clase haciendo énfasis en la etapa que mejor considere. A continuación se presenta sólo una breve descripción de cada uno de los eventos mostrados en la línea de tiempo de la figura 1 y se ha dividido en tres secciones para su mejor entendimiento. En la primera, *Carácter dual de la Luz*, se abordan los resultados experimentales que no podían ser explicados con la teoría clásica y que dieron origen a las hipótesis cuánticas. La sección *Hacia el carácter dual de la materia*, presenta los modelos que se propusieron para la estructura del átomo, así como los resultados experimentales que pudieron ser explicados con la hipótesis de la cuantización de las energías del átomo. Finalmente, la sección *La gestación del concepto de onda de materia,* describe el razonamiento que llevó a Louis de Broglie a plantear el concepto de onda de materia.

*Carácter dual de la Luz*

La física clásica estudia dos categorías de fenómenos, las partículas y las ondas. Las partículas son objetos diminutos que tienen masa y obedecen las leyes de Newton. Asimismo, las ondas son fenómenos que se propagan en algún medio material o incluso en el vacío y presentan características de difracción e interferencia. Por tanto, es fácil diferenciar entre partículas y ondas. Durante prácticamente todo el siglo XIX, con los trabajos realizados por Th. Young, E.L. Malus, A. Fresnel, F.J. Arago, J. Fraunhofer, J.C. Maxwell y después por H. Hertz, quedó bien establecido que la luz es un fenómeno ondulatorio (L. de la Peña 2004).

Sin embargo, no todas las observaciones experimentales efectuadas en tal siglo pudieron ser explicadas de manera conveniente basándose en el aspecto ondulatorio de la luz, por ejemplo, la intensidad de la luz emitida por los llamados cuerpos negros. Los esfuerzos para explicar este fenómeno utilizando los resultados clásicos, es decir utilizando las leyes de Newton y las ecuaciones de Maxwell, no tuvieron éxito. Las propuestas hechas por un lado por Rayleigh, con su modelo de la luz encerrada en una cavidad con interiores perfectamente reflejantes, y por otro por Wien, no describían los resultados experimentales. En 1900 Max Planck logra ajustar las curvas experimentales de la distribución espectral de la energía negra haciendo la hipótesis que el intercambio de energía entre las paredes de la cavidad y la radiación encerrada se lleva a cabo de manera discreta (algo así como intercambio de “átomos de energía”).

Otro de los resultados experimentales que no podían ser explicados con las teorías clásicas, es el efecto fotoeléctrico, descubierto por H. Hertz en 1887, que es la emisión de electrones cuando la luz choca con una superficie metálica. La evidencia experimental mostraba que: había expulsión de electrones inmediatamente no importando si la luz era débil o intensa, la intensidad de la luz no afectaba la energía de los electrones expulsados, luz de baja frecuencia no expulsaba electrones, pero una débil luz ultravioleta sí lo hacía y éstos salían con rapideces mucho mayores. Todas estas situaciones no podían ser explicadas con las teorías clásicas (Sears, Zemansky, Young, Freedman, 2005).

En 1905 Albert Einstein logra ajustar los datos experimentales del efecto fotoeléctrico haciendo la hipótesis de que la luz está constituida por un número muy grande de corpúsculos (“átomos de luz”). Fue hasta los años 1922 y 1923 que esta hipótesis fue comprobada con el descubrimiento hecho por A. H. Compton, del fenómeno de dispersión de los rayos-X por electrones libres. Compton descubrió que cuando los rayos-X chocan con la materia, algo de su radiación se dispersa, pero con menor frecuencia que la radiación incidente y que el cambio en la longitud de onda depende del ángulo en que se dispersa la radiación. La teoría clásica pronostica que la onda dispersada tendría la misma longitud de onda que la onda incidente. Sin embargo, en 1923 A. H. Compton explica la dispersión de luz debida a electrones libres considerando que tal dispersión es una colisión entre dos corpúsculos uno de materia (electrón) y el otro de luz (Sears, Zemansky, Young, Freedman, 2005).

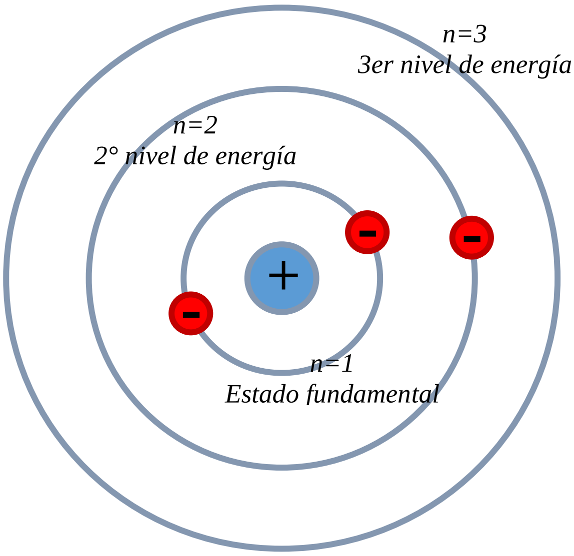
*Hacia el carácter dual de la materia.*

Para 1897, J.J. Thomson descubrió el electrón a partir de realizar experimentos para determinar la naturaleza y estructura de los rayos catódicos, los que creía que estaban compuestos por “corpúsculos”, o partículas cargadas negativamente. De sus resultados pudo determinar la relación que había entre la carga y la masa de esos corpúsculos que después todos llamarían electrones y que estaban contenidos en los átomos, es decir, los átomos estaban formados por partículas más pequeñas. Esta fue una hipótesis bastante revolucionaria para esa época (Sánchez, 2001).

Los resultados obtenidos por J.J. Thomson junto con los obtenidos por Millikan en 1909 sobre la carga negativa del electrón, indicaban que entonces también debería de haber cargas positivas y que casi toda la masa de un átomo estaba asociada a estas cargas positivas. Lo que no se sabía era cómo deberían de estar distribuidas todas estas cargas y la masa dentro del átomo. J.J. Thomson ideó un modelo al que llamó “budín con pasas”, en las que las pasas representaban a los electrones, con carga negativa, inmersos en un medio, con carga positiva, representada por la masa del budín (Sears, Zemansky, Young, Freedman, 2005; Hewitt, 2007).

Entre 1910 y 1911 Ernest Rutherford, junto con dos estudiantes H. Geiger y E. Marsden, realizó experimentos que consistían en lanzar partículas con carga positiva (partículas-α) hacia hojas muy delgadas de oro. Las partículas alfa son miles de veces más masivas que los electrones, por lo que si el átomo tuviera la configuración propuesta por Thomson, atravesarían la hoja de oro sin desviarse, sin embargo, observaron que algunas partículas se desviaban considerablemente de su trayectoria en línea recta e incluso unas pocas se desviaban hacía atrás, es decir 180°. Rutherford pensó que la carga positiva del átomo debería de estar concentrada en un espacio mucho menor, al cual llamó núcleo, y por tanto el campo eléctrico en el núcleo sería de tal magnitud que podría repeler a las partículas alfa. Así, propuso un modelo similar al sistema planetario, en el que en el centro estaría el núcleo conteniendo a toda la carga positiva y al menos el 99.5 % de la masa del átomo y alrededor de él los electrones (Sears, Zemansky, Young, Freedman, 2005).

El modelo propuesto por Rutherford era inconsistente con la teoría clásica, ya que un electrón moviéndose en una órbita debería de emitir radiación de forma continua debido a su aceleración, lo cual provocaría que éste se moviera a lo largo de una espiral hacia el núcleo, cosa que no sucedía. Es cuando Niels Bohr, quien en 1912 realizó una estancia en el laboratorio de Rutherford en Manchester (Sánchez, 2005; Simonyi, 2012), con base en el modelo planetario de Rutherford propone que los electrones siguen ciertas trayectorias alrededor del núcleo (órbitas estacionarias) pero sin emitir radiación y con una energía estable $E_n$, y que un átomo sólo irradiará cuando un electrón “brinque” de una órbita a otra. La frecuencia de la luz radiada está relacionada mediante una constante de proporcionalidad con la diferencia de energías de las trayectorias permitidas (órbitas estacionarias) en el átomo. En la figura 2 se muestra un esquema del modelo propuesto por Bohr.




$$E_n = -\frac{e^2}{2an^2}, n \in \mathbb{N}$$

$$E_{n_2} - E_{n_1} = h\nu$$

Fig. 2. Modelo atómico propuesto por N. Bohr. Sugiere que los electrones se encuentran en órbitas estables con una energía $E_n$. La diferencia de energías cuando un electrón brinca del nivel 2 al nivel 1 es directamente proporcional a la frecuencia de la luz radiada por el átomo.

En 1913 Niels Bohr publica los resultados de su teoría en la que cuantizaba las energías del átomo tomando en cuenta la teoría de Planck de que la radiación se emitía y se absorbía en cuantos. Con este modelo, Bohr pudo explicar las series espectroscópicas que Balmer, Ritz, entre otros, habían observado experimentalmente, así como la ecuación propuesta por Rydberg para las series espectrales del hidrógeno. Es decir, con todo esto, Bohr había demostrado que los saltos entre diferentes órbitas producían luz radiante de diferentes frecuencias y por lo tanto líneas espectrales (Sánchez, 2005).

*La gestación del concepto de onda de materia.*

Alrededor de 1923-1924 Louis De Broglie se preguntaba:

¿Por qué aparecen números enteros en el modelo de Bohr ($n$ en las ecuaciones mostradas en la figura 2)? Hasta ese momento se sabía que los números enteros jugaban un papel primordial en los fenómenos ondulatorios (interferencia, difracción, vibraciones propias).

Por ello L. de Broglie se pregunta: ¿No será que los números enteros en el modelo de Bohr nos están susurrando que el átomo es en sí un fenómeno ondulatorio? Y justamente, la estabilidad del átomo se deba a un fenómeno de interferencia no-destructiva.

A continuación, se presentan las hipótesis que L. de Broglie plantea para formular el concepto de onda de materia. El razonamiento de L. de Broglie es simple pero muy fino, convencido de que la estabilidad del átomo pueda ser consecuencia de una propiedad ondulatoria. Considera en primer lugar una partícula libre de masa $m$ y como primera hipótesis le asocia una onda. ¿Qué es lo que vibra en esta onda?, L. de Broglie no lo sabe, aun así continua con su idea. La partícula libre puede moverse con una velocidad constante $\boldsymbol{v}$. L. de Broglie considera un sistema $S_0$ de referencia anclado a la partícula, en tal sistema la partícula se encontrará en reposo, por lo cual le asocia una vibración exclusivamente temporal $\sin(\omega_0 t_0)$, esta onda estacionaria vista desde un sistema de referencia (llamado $S$) en el cual la partícula viaja con la velocidad $\boldsymbol{v}$ se convierte en una onda viajera dada por $\sin(\omega t - kx)$, donde la frecuencia y la magnitud del vector de onda vienen determinados, según la relatividad especial, por $\omega = \omega_0/\sqrt{1-\beta^2}$ y $k = \omega\beta/c$, siendo $\beta$ la razón de velocidad de la partícula a la velocidad de la luz ($\beta = v/c$). La misma relatividad especial nos dice que la energía de la partícula vista desde el sistema de referencia $S$ está dada por la expresión $E = pc/\beta$ ($p = mv$ es el momento lineal de la partícula). La segunda hipótesis que hace L. de Broglie es la misma de Planck y Einstein, que la energía de la onda es proporcional a su frecuencia ($E = \hbar\omega$). Finalmente, la tercera y última hipótesis de L. de Broglie es que la energía de la partícula es justamente la energía de la onda. Uniendo estas tres hipótesis y mediante una pequeña manipulación algebraica, L. de Broglie llega a su resultado fundamental que relaciona el momento lineal de la partícula con la longitud de onda de la onda asociada, esto es, $\lambda = h/mv$.

## Aprendizajes esperados

Se espera que los estudiantes sean capaces de:

- Reconocer que la Física es una ciencia fenomenológica en la que no siempre se pueden explicar los fenómenos con los conocimientos existentes en el momento.

- Desarrollar el pensamiento crítico analizando ideas establecidas y compararlas con las observaciones fenomenológicas y ver su viabilidad de permanencia o de modificación.

- Como consecuencia de esta confrontación: observar el surgimiento de nuevos conceptos. Comprender y reconocer el concepto de onda de materia.

## Referencias

de Broglie L, The wave nature of the electron, Nobel lecture, Diciembre 12, 1929.

de la Peña L., Cien años en la vida de luz, FCE, SEP, CONACyT, México, 2004.

García, E. Historia, epistemología y enseñanza de las ciencias; caso mecánica de fluidos. Enseñanza de las Ciencias, Número Extra VIII Congreso Internacional sobre Investigación en Didáctica de las Ciencias, Barcelona, pp. 1255-1259 (2009). http://ensciencias.uab.es/congreso09/numeroextra/art-1255-1259.pdf

Hewitt P. G., Física conceptual, décima edición, Edit. Pearson Education, México, 2007.

Perea, M.A, y Buteler, L.M. El uso de la historia de las ciencias en la enseñanza de la física: una aplicación para el electromagnetismo. Góndola, Enseñ Aprend Cienc, 11(1), 12-25. doi: 10.14483/udistrital.jour.gdla.2016.v11n1.a1, 2016

Sánchez Ron J. M., Historia de la física cuántica. I. El período fundacional (1860-1926), Edit. Crítica, Barcelona, España, 2001.

Sears F. W., Zemansky M. W., Young H. D., Freedman R. A., Física universitaria con física moderna, Vol 2, undécima edición, Edit. Pearson Education, México, 2005.

Simonyi K., A cultural hystory of physics, Edit. CRC Press, New York, 2012.

# La realidad de los reales

Hidalgo González José Luis
luigi.df.1723@outlook.com

Resumen:

En este trabajo se presentarán distintas herramientas para la evaluación de un grupo de 1er año de preparatoria de sistema incorporado a la UNAM, tomando como tema principal los números reales. Las actividades presentadas se organizaron acorde al ciclo del aprendizaje y a los niveles de Vann Hiele, con la finalidad de que el alumno note, a lo largo de todo su curso, sus fortalezas y debilidades en cuanto a este tema. En la evaluación se utilizan los estándares mínimos y de excelencia, así como la parrilla de evaluación. Las actividades son las siguientes:

- Diagnóstico: se ven actividades con un fin lúdico, sin aportación para la calificación del alumno.

- Actividades para la construcción de conceptos: como su nombre lo dice, son actividades con las cuales se empiezan a construir todos los conceptos y elementos. En estas actividades el alumno identificará los temas que se le dificultan.

- Actividades para la estructuración: estas actividades están diseñadas para que el alumno profundice en las definiciones, temas y conceptos, para formalizar, además de trabajar ejercitar aquello que conviene mecanizar.

- Problemas de aplicación: Esta etapa funcionará principalmente para la que el alumno utilice el conocimiento adquirido en situaciones didácticas en contexto de otras ciencias, de la industria y del laboratorio, ya que para resolver las actividades propuestas, necesitarán un dominio de los contenidos de, al menos los estándares mínimos. Estas actividades

aportan criterios para asignar una calificación aprobatoria. La actividad propuesta es hacer un proyecto con los números construibles.

En cuanto a los contenidos matemáticos, se eligió el tema “los números reales” como eje principal, y de didáctica, la “elaboración de un plan de evaluación”, en el que se utilizan: el contrato didáctico, la parrilla de evaluación y los estándares mínimos y de excelencia.

- Contrato didáctico: se especifica que es lo que se va a evaluar, así como los objetos y criterios de evaluación y que puntaje se le otorga a cada actividad.

- Parrilla de evaluación: Se usa para identificar, en cada una de las actividades, las dudas de los alumnos y otras necesidades formativas, como los conceptos en los que hace falta profundizar, y las habilidades que se requiere desarrollar en el grupo (prognosis) e individualmente (diagnosis).

- Estándares mínimos y de excelencia: Se especificarán los contenidos del curso, que serán utilizados para asignar la calificación mínima aprobatoria.

Objetivo:

Presentar actividades para desarrollar el tema de los números reales a nivel preparatoria, así como la forma en que se evaluarán.

Marco teórico:

❖ Niveles de Van Hiele: Son 5, suelen nombrase del 0-4, estos niveles son propuestos para la enseñanza de la geometría, en este trabajo los adaptamos para el tema de los números reales, estos niveles son:
    - Nivel 0 (Visualización o reconocimiento): identificar los números como una unidad, sin diferenciar sus atributos.

- Nivel 1 (Análisis): se perciben las propiedades y componentes, describir las propiedades de los números, manipularlos y ver si surgen naturalmente nuevas propiedades, aun no se realizan clasificaciones entre ellos.
- Nivel 2 (ordenación o clasificación): Se describen las clasificaciones de los números de manera formal, se reconocen qué propiedades se derivan de otras, estableciendo relaciones entre ellas.
- Nivel 3 (Deducción formal): Se realizan algunas deducciones, se comprende cómo se puede llegar a los mismos resultados partiendo de proposiciones o premisas distintas, se dominan los axiomas de los números reales.
- Nivel 4 (Rigor): Este nivel, donde se reconoce la existencia de los sistemas axiomáticos, se piensa inalcanzable para el alumno del nivel al cual está dirigido este trabajo, por lo tanto, dentro de las actividades no se plantea llegar a este último nivel.

❖ Ciclo del aprendizaje: Las actividades que se presentan están secuenciadas de acuerdo con el ciclo de aprendizaje de (Casellas y Jaume Jorba, 1997).


Figura 1: ciclo del aprendizaje

❖ Proyecto 2061:

"El Proyecto 2061 de la Asociación Americana para el Avance de la Ciencia, es una iniciativa a largo plazo para reformar la educación de la ciencia desde kindergarten hasta duodécimo grado (K-12) en los Estados Unidos. Para dicho Proyecto se ha desarrollado un grupo de herramientas conceptuales para mejorar el aprendizaje de la ciencia (ciencia en este caso incluye matemáticas, tecnología, ciencias físicas y sociales): libros, CD-ROMs, recursos electrónicos y talleres. (AAA, 2013). En este proyecto encontramos estándares en matemáticas, los que adaptamos para dar elaborar los estándares mínimos que debería de dominar el alumno para aprobar el curso; y los de excelencia, para obtener una calificación mayor al 6.

## Desarrollo

Me enfoqué principalmente en actividades con las cuales se distinguen y practican las diferentes propiedades de los números reales, ya que uno de los principales problemas en matemáticas que tiene el alumno al entrar al primer año preparatoria es, falta de dominio de las operaciones de suma y multiplicación con estos números. Así que, se pretende que los alumnos tengan un aprendizaje significativo, favoreciendo que ellos mismos construyan las propiedades a partir de su intuición, practiquen con ellas, las clasifiquen y las formalicen mediante la teoría.

En este plan se presentan los estándares mínimos y de excelencia correspondientes al primer parcial del primer semestre de la preparatoria con sistema incorporado a la UNAM. Se especificarán los contenidos del curso, así como los problemas y ejercicios para la regulación del aprendizaje y los que serán utilizados para asignar una calificación de acuerdo al dominio de los estándares.

Tabla 1: Estándares mínimos y de excelencia, actividades para la regulación y para calificar

| Contenidos (estándares) | Actividades para la regulación | Actividades para calificar |
|---|---|---|
| Se pueden emplear los números para contar cosas, ordenarlas o identificarlas. (mínimo) | Actividad diagnostica, problema contexto cotidiano. | Problema contexto cercano y de metacognición. |

| | | |
|---|---|---|
| Si se ubica el cero en una recta se puede representar cualquier otro número en posición de la recta (mínimo). | Actividad de recta numérica (nivel cero de Van Hiele), con los números del diagnóstico. | Actividad Nivel 3 de Van Hiele. |
| Hay reglas de forma inductiva, las cuales se pueden demostrar para todo número natural o pueden negarse al encontrar un contra ejemplo (excelencia). | Actividad del Q-Sort . | Actividad número par. |
| Una recta numérica puede prolongarse al otro lado del cero (mínimo). | Actividad de recta numérica (nivel cero), con los números del diagnóstico, problema contexto cercano. | Problema contexto cercano y de metacognición. |
| Los números enteros tendrán las mismas propiedades que los números naturales, más la propiedad de inversos aditivos (excelencia) | Mapa conceptual, Mapa mental, diferenciador semántico. Actividad del Nivel 1 de Van Hiele. | Actividad Nivel 3 de Van Hiele. |
| La expresión a/b puede tener significados diferentes (mínimo). | Problema contexto cercano. | Problema contexto lejano y de metacognición. |
| El número 1/b se entiende como el inverso multiplicativo de b (mínimo). | Mapa conceptual, mapa mental. Actividad del Nivel 1 de Van Hiele | Actividad sin contexto. |
| Mostrar que el conjunto de los números racionales cumple con las propiedades de un campo (excelencia). | Mapa conceptual, diferenciador semántico. Actividad Nivel 2 de Van Hiele | Actividad Nivel 3 de Van Hiele. |
| Hay números que no pueden expresarse de la forma a/b.(mínimo) | Actividad 1 de Van Hiele Actividad Nivel 2 de Van Hiele. Diferenciador semántico. | Actividades sin contexto. |
| Los números irracionales no son un campo (excelencia). | Mapa conceptual. Actividad Nivel 1 de Van Hiele. | Actividades sin contexto. |
| El conjunto de los números reales forma un campo (excelencia). | Mapa conceptual, Actividad Nivel 1 de Van Hiele. Actividad Nivel 2 de Van Hiele | Diagrama de Venn |
| Hay subconjuntos de los números reales que tienen todas las propiedades de un | Mapa conceptual. | Proyecto final. |

| | | |
|---|---|---|
| campo además de los racionales (excelencia). | | |

Para evaluar cada una de estas actividades utilizaremos una parrilla de evaluación, que nos ayudará a identificar las dudas de los alumnos acerca de que es lo que se le está evaluando un ejemplo sería.

Tabla 2: parrilla de evaluación.

| Problema de metacognición | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Alumno | R1=Julio | R2= propiedades de los números racionales | R3= ahorro por mes, fecha de liquidación de la habitación y precio por habitación. | Calcular la fecha de liquidación | Calcular el ahorro teniendo en cuenta las semanas | Restar el precio del hotel del ahorro total | ∑ |
| Bere | . | . | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | 4 |
| Citlalli | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | 6 |
| José Luis | ✓ | . | ✓ | . | . | ✓ | 3 |
| Mari | . | . | ✓ | ✓ | . | ✓ | 3 |
| ∑ | 2 | 1 | 4 | 3 | 2 | 4 | |

***Diagnóstico:***

Las actividades de diagnóstico se harán durante una clase de 50 minutos.

*Actividad de comparaciones*

Supón que no existen los números (como la humanidad en la prehistoria). Responde las siguientes preguntas y explica como llegaste al resultado.

1. ¿Hay más hombres o mujeres en tu salón?
2. ¿Hay más bancas o personas en tu salón?
3. ¿Hay más bancas o mujeres en tu salón?
4. ¿Hay más gises u Hombres en tu salón?
5. ¿Tienes más lápices o colores?

Una solución a este problema sería:

Respuesta a la pregunta 1. Como no puedo utilizar números entonces pongo a cada mujer con un hombre, si alguna mujer se quedó sin pareja quiere decir que hay más mujeres, si algún hombre quedo sin pareja quiere decir que hay más hombres, si todos tienen pareja hay la misma cantidad de hombres que de mujeres.

Esta actividad tiene la finalidad de introducir el concepto de número, ya que habrá situaciones en donde las cantidades sean muy grandes como para asociarlas o compararlas con otras, en esas situaciones necesitaremos otras herramientas, como lo es un número.

*Coctel de Reales*

El profesor repartirá una tarjeta a cada alumno, la cual tendrá un número real diferente a los demás, es importante incluir a todas las clases de números reales, si el grupo es de 20 alumnos entonces se pondrán 5 números naturales, 5 enteros negativos, 5 fracciones y 5 números irracionales, esta proporción se conserva si el grupo es más grande. Una vez asignados los números, el profesor pondrá en una lista los nombres de los alumnos, junto con el número que le tocó, (esta lista solo es para el profesor) una vez cumplidas estas condiciones comenzará el juego (esta actividad se puede realizar en el salón o en el patio).

1. Se hace una rueda con todos los alumnos del salón (excepto uno que será elegido al azar), dejando un brazo de separación entre cada alumno.
2. El alumno elegido se pondrá en el centro de la rueda.
3. El profesor dirá en voz alta "coctel de números ________ " y dirá el nombre de algún subconjunto de los números reales.
4. Los alumnos que pertenezcan a ese subconjunto deberán de cambiarse de lugar lo más rápido posible, al final sobrará uno y se quedará en el centro.
5. Cuando el profesor diga "Coctel de números Reales " todos se deberán cambiar de lugar.
6. Se repetirá esta dinámica hasta que termine la clase.

Cada vez que los alumnos se cambien de lugar el profesor preguntara ¿qué alumnos fueron los que se cambiaron?. Anotando él en su lista si se debieron de cambiar o no. Esta lista servirá como guía al profesor para saber que alumnos tienen más presente a que subconjunto pertenece cada número.

Ejemplo de KPSI:

Escribe para cada afirmación el número que corresponde a tu apreciación acerca de lo que sabes de cada una: 1.- No tengo idea; 2.- Los he oído nombrar; 3.- Tengo amplio conocimiento; 4.- Domino a profundidad.

a) Números naturales _
b) Números enteros _
c) Números racionales _
d) Números irracionales_
e) Números reales _

El KPSI nos ayudará para identificar qué es lo que cree el alumno que sabe, y a ellos, con una aplicación del mismo después de ver el tema, les apoyará en la autorregulación de una de las habilidades metacognitivas "saber lo que sé".

Nivel Cero de Van Hiele: Colocar en una recta numérica los números utilizados en el coctel de reales ¿preguntar qué es? ¿para qué sirve? ¿qué elementos identifican en esa recta?

***Actividades para la construcción de conceptos:***

*Contrato didáctico Normativo*

Este contrato didáctico lo construye el grupo clase junto con el profesor, donde cada uno aportará reglas para la convivencia dentro del salón, a partir de las problemáticas que han observado durante sus anteriores ciclos escolares. La intención de este contrato es identificar esos problemas y hacer compromisos, tanto el profesor como los alumnos, para que estos no afecten al aprendizaje de los alumnos y la cadencia de la clase.

Nivel 1 de Van Hiele:

Pedir a los alumnos que describan las propiedades de los elementos que identificaron dentro de la recta, realicen operaciones entre ellos y vean las propiedades de sus productos (presentar a cada subconjunto de manera intuitiva y nombrar cada subconjunto) y dar el nombre de cada una de las propiedades vistas (serán las 10 propiedades del campo de los números reales).

En especial para presentar a los números irracionales se utilizará el número π como punto de partida para identificarlos, ya que es el número irracional con el cual están más familiarizados. Para esto se verá en clase el siguiente video, en donde ellos anotaran los elementos más importantes que percibieron (el video se puede repetir las veces necesarias para captar todas las ideas principales).

- www.youtube.com/watch?v=NMjWyyB3mpA .

Se hará una reflexión grupal de los elementos más importantes que identificaron en el video.

Con esto se pretende hacer énfasis en los siguientes aspectos:

- de donde se obtiene π.
- pi es irracional.
- qué es un número irracional.
- π tiene infinitos decimales.

Con estos conceptos se empezará a formar una definición más amplia de números irracionales.

*Problema Contexto Cotidiano* (análisis de una tabla de futbol).

***Actividades para la estructuración***

Se presentan actividades del tipo operatorio, por ejemplo, “resuelve las siguientes operaciones

*Preguntas para la metacognición*

- ¿Qué hiciste para multiplicar dos números negativos o de diferente signo?
- ¿Qué tipo de número obtuviste en los ejercicios 6, 7, 8, 9?
- ¿Los números irracionales cumplen con todas las propiedades de un campo?

Actividad extra: ¿por qué (+)(-)=(-) y (-)(-)= (+)? ¿por qué $\sqrt{2}$ es irracional?

*Suma de números Naturales (*Q-sort)

En una hoja para entregar responde de manera individual la siguiente pregunta y escribe tu nombre al reverso de la solución.

¿Cuánto da la suma?

a) 1+2+3+...+36=

Una vez terminada esta actividad se entregarán todas la soluciones al profesor y él le pondrá una letra a simple vista a cada una de estas, se pegaran en el pizarrón de clases y los alumnos pasaran a observar las similitudes y las diferencian entre las soluciones, jerarquizando desde la solución más acertada a la menor. El grupo orientado por profesor analizará los resultados en una tabla.

La intención de esta actividad es que los alumnos vean cuales fueron las principales características por las cuales una solución era mejor que otra. Así los alumnos aprenderán a reconocer aciertos y errores dentro de sus trabajos, lo que favorece la autorregulación y la regulación mutua.

Terminando de hacer el Q-sort el profesor dará a los alumnos la siguiente actividad:

- Se sumarán números de forma consecutiva para ver si los alumnos logran identificar algún patrón en esas sumas.
- Pedir a los alumnos que representen la suma desde el número 1 hasta un número muy grande "n", la idea es que lleguen a estas dos representaciones (también se puede de forma horizontal)

$$\begin{array}{ll} & n \\ & n-1 \\ & . \\ + & . \\ & . \\ & 3 \\ & 2 \\ & 1 \\ \hline & S \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ll} & 1 \\ & 2 \\ & . \\ + & . \\ & . \\ & n-2 \\ & n-1 \\ & n \\ & \underline{S} \end{array}$$

- Ahora se pregunta a los alumnos como sumarian esas dos expresiones de modo que las sumas den el mismo resultado, y cuantas veces hay esa cantidad. El resultado tiene que ser similar a lo siguiente:

$$
\begin{array}{rlcl c l c l}
 & n & \longrightarrow & 1 & & n+1 & & \\
 & n-1 & \longrightarrow & 2 & & n+1 & & \\
 & . & & . & & . & & \\
+ & . & + & . & = & . & & = n\,(n+1) \\
 & . & & . & & . & & \\
 & 3 & \longrightarrow & n-2 & & n+1 & & \\
 & 2 & \longrightarrow & n-1 & & n+1 & & \\
 & 1 & \longrightarrow & n & & n+1 & & \\
\hline
 & S & \longrightarrow & S & & 2S & &
\end{array}
$$

entonces "2S= n(+1) entonces $S = \frac{n(n+1)}{2}$ ahora la pregunta sería si esa regla que encontramos sirve para cualquier número.

Se hacen varios ejemplos con diferentes números en donde se muestra que la regla siempre se cumple.

Caracterización de los conjuntos (diferenciador semántico):

Escribe con una "Q" si cumple la propiedad de numero racional con una "I" si es para un número irracional.

Tabla 3: Diferenciador semántico.

| Racionales | Irracionales | $-\sqrt{4}$ | 0.333333... | $\sqrt{8}$ | $\frac{e}{\pi}$ | $-\frac{1}{\pi}$ | $\frac{4\pi}{3\pi}$ | 0 | -1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Inverso aditivo | Inverso aditivo | | | | | | | | |
| Inverso multiplicativo | Inverso multiplicativo | | | | | | | | |
| Neutro aditivo | Neutro aditivo | | | | | | | | |
| Neutro multiplicativo | Neutro multiplicativo | | | | | | | | |
| Cerradura suma | Cerradura suma | | | | | | | | |
| Cerradura multiplicación | No tiene cerradura multiplicación | | | | | | | | |
| Se escribe como a/b | No se escribe como a/b | | | | | | | | |

Además se volverá a jugar el "coctel de los Números reales" esta vez el profesor podrá hacer combinaciones como "Coctel de racionales sin naturales" además de que al preguntar quiénes fueron los que se movieron los demás alumnos podrán corregir si alguno de ellos se debió mover o no.

Nivel 2 de Van Heile:

Los números que identificaron de las rectas y con los productos de las operaciones que hicieron clasificarlos dentro de los subconjuntos de los números reales tomando en cuenta todas sus propiedades.

Problema de metacognición:

Una pareja planea ir de vacaciones a la playa durante una semana, los días que tiene disponible para su llegada son 10 abril, 25 de mayo, 17 de julio y 3 de junio, los precios en el hotel que eligieron son:

- 10 abril - $20,000.
- 25 mayo- $12,000.
- 3 junio - $19, 000.
- 17 julio- $18, 000.

Tomando en cuenta que el ingreso mensual de la pareja es de $10,000 y que solo pueden ahorrar a lo más 2/5 de su salario al mes, y además la habitación se tiene que liquidar con una semana de anticipación.

Explica paso a paso tu procedimiento y lee todas las preguntas antes de contestarlas.

¿Con cuál de las opciones a la pareja le sobra una mayor cantidad de dinero ahorrado, tomando en cuenta que estamos a 10 de octubre?

¿Qué conceptos necesito?

¿Cuáles son las partes más importantes del problema?

¿Desde tu punto de vista que es ahorrar?

Problemas de aplicación:

Nivel 3 de van Heile:

Realizar un diagrama de Venn de los números reales:

¿La siguiente regla se cumple?

¿El  número n(n+1) es divisible entre 2 ? explica.

Problema contexto lejano:

¿Cuál influencer es mejor?

Imagina que eres el encargado de marketing de una empresa muy famosa a nivel mundial __________________ (elige una empresa), y que has decidido contratar a un influencer para dar a conocer a más gente a tu producto por medio de instagram y otro influencer por medio de youtube.

Junto con todo tu grupo hagan una lista de 8 influecers famosos en instagram donde al menos tres sean de arte, ciencia, literatura etc. Investiguen los datos que te pide la siguiente tabla y elige la opción que más le convenga a tu marca. Asígnale una calificación de 1-10, donde 10 es lo mejor, a los siguientes puntos:

- Calidad de imagen.
- Calidad de video.
- Contenido.
- Aporte a la sociedad

Tabal 4: Problema contexto lejano 1.

- ¿Qué elección tomaste?
- ¿Cuál fue el punto más importante para tomar tu decisión?

Para Youtube, elijan entre todo el grupo a 5 canales famosos, los cuales analizarán junto con los siguientes canales: Derivando, El nopal times tops, Te lo resumo así no más y Quantum Fracture.

Llenen la siguiente tabla tomando los datos de cada uno de los canales en los cueles deberán de calificar de 1-10 los siguientes rubros:

- Calidad audio
- Calidad video
- Contenido
- Aporte a la sociedad

En likes vs dislkes calculen por cada cuantos likes hay un dislike en los últimos 10 videos y obtén el promedio.

Hacer lo mismo para reacciones vs vistas (por cada reacción cuantas vistas

| Influencer | Calidad de imagen | Calidad de Video | Número de seguidores | Contenido | Aporte a la sociedad | Promedio de likes por foto (ultimas 10 fotos ) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |

hubo).

Tabla 5: problema contexto lejano 2

| Canal | Calidad audio | Calidad video | # de seguidores | Contenido | Aporte a la sociedad | Likes vs dislikes | Prom. de vistas por video (últimos 10) | Reacciones vs vistas |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |

¿Qué canal elegiste?

¿A qué le diste más importancia y por qué?

Escribe una reflexión acerca de que en general qué es lo que las grandes empresas toman en cuenta en primer lugar ¿Te parece que es lo correcto?

Proyecto final Números Construibles:

Hacer por equipos una búsqueda de información sobre los números construibles, donde se respondan las siguientes preguntas y tenga los siguientes rubros.

- ¿Qué es un número construible?
- ¿Están contenidos en los números reales?
- ¿Cómo se relacionan los subconjuntos de los números reales con los construibles?
- Demostrar las propiedades de campo de los números construibles.
- Hacer un ejemplo de cada propiedad
- ¿Existen números no construibles?

- Hacer la construcción de 3 números diferentes de 0 y 1 detallando el proceso.

Ahora presento lo que sería el contrato didáctico para evaluar las actividades presentadas en este trabajo. Este contrato nos sirve para aclarar las dudas con respecto a la evaluación que se le hará al alumno.

Tabla 6: Contrato didáctico de evaluación (que se va a calificar):

| ACTIVIDAD | OBJETOS DE EVALUACIÓN | CRITERIO DE EVALUACION. | CRITERIO DE RESULTADO. | PORCENTAJE |
|---|---|---|---|---|
| Problema contexto lejano. | Aplicación de las propiedades de los números enteros racionales e irracionales, significado del número 1/b, razonamiento | Detallar todos los procedimientos y operaciones que utilizaste al momento de resolver el problema, obtención del promedio, obtención de likes vs dislikes y reacciones vs vistas | ortografía; orden; que los conceptos correspondan a las actividades. | 2 |
| Problema de meta cognición. | Aplicación de las propiedades de los números enteros racionales e irracionales, significado del número 1/b, razonamiento, metacognición | Respuestas a las preguntas metacognitivas 2 y 3 , detallar el procedimiento de resolución, exactitud operaciones y resultado | | 2 |
| Actividad número par. | Propiedades de los números racionales, razonamiento lógico matemático | Trabajar por casos para n , detallar el procedimiento, poner qué propiedades utilizaste, respuesta | | 1 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Actividad sin contexto. | Propiedades de los números reales, jerarquía de operaciones, propiedades campo. | Poner cada propiedad utilizada, operaciones, resultado, respuesta preguntas 2 y 3 | | 1 |
| Diagrama de Venn | Sub conjuntos de los números reales | El orden en que colocaron los subconjuntos de los números reales. | | 1 |
| Proyecto final | Propiedades de campo, subconjunto de los números reales, números construibles | Poner la definición correcta de número construible, verificar si están contenidos en los reales, demostraciones de sus propiedades, construcción de los números. | | 3 |

Aprendizajes esperados: Los aprendizajes esperados son los que se estipulan en los estándares mínimos y de excelencia. Además de esos podríamos poner en general los siguientes.

- Que el alumno reconozca las aplicaciones y el uso de estos números en su vida diaria.
- Que el alumno manipule y domine las propiedades de los números reales.
- Que el alumno tenga una perspectiva más amplia acerca de estos números.
- Que el alumno vea reconocido su esfuerzo en su calificación.

Referencias:


- Ester Casellas, Jaume Jorba, Rafael Rodríguez, Tomás Salamí, Neus Sanmmartí, Enric Tarragó. “Estrategias y técnicas para la gestión social del aula, volumen 1 La regulación y la autorregulación de los aprendizajes” (1997).

- American Association For The Advancement Of Science .(2013) Proyecto 2061 en español http://www.project2061.org/esp/Default.htm
- Fernando Fouz, Berritzegune de Donosti .(sf). Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría. Ataritzar Bidea. (se).

# Enseñanza del concepto de integral en el nivel medio superior

Alejandro Hernández Arteaga[53]
alejandroha295@gmil.com

## Resumen

El tema para desarrollar en este escrito que llega a ser muy complejo y es en donde se podría notar a nivel un poco más accesible el que las matemáticas aparte de ser una ciencia, tienen una gran parte creativa. Solo nos enfocaremos a la parte del concepto por cuestiones de extensión.

La idea de enfocarse solo en el concepto de la integral, sin ser tan rigurosos, usando definiciones formales de libros técnicos viene de tratar de subsanar una falla que se tiene mucho en cuestiones de ciencias en niveles básicos, así como la forma de presentar a los jóvenes estas definiciones para que les sean más naturales que con una definición normal, para que al momento de que tengan que usar esa definición les sea más natural y no ajena.

En el siguiente texto se presenta una alternativa al método tradicional que se presenta en la mayor parte de las escuelas de nivel medio superior para la enseñanza de este tema, con el cual muchos alumnos presentan problemas al momento de volverlas a ver en el nivel superior. Se realizó utilizando la zona de desarrollo próximo que se esperaría de los alumnos en este nivel, aumentando en complejidad y abstracción conforme avanza el curso mientras que al mismo tiempo se desarrolla en diferentes etapas de conocimiento, las cuales en la mayoría de los cursos se ignoran o no suelen ser desarrolladas de manera adecuada priorizando los tiempos del curso sobre el aprendizaje de los alumnos.

## Objetivo

Mediante la propuesta de curso presentada en este trabajo se espera que el alumno tenga un acercamiento gradual al concepto de integral para poder trabajar con el mismo de manera más abstracta en el nivel superior, esto se hace introduciéndolo con un enfoque más natural al alumno mediante ejemplos de la vida cotidiana que lo harán accesible. Este trabajo busca alejarse de la corriente inductivista que tradicionalmente se ha tenido en México durante muchos años y, que, en épocas recientes, ha fallado en la formación íntegra de las personas. Se trató de usar más el constructivismo y la psicología cognitiva, ya que la primera ayuda a que los alumnos vean las cosas por ellos mismos y la segunda fomenta su pensamiento crítico de una mejor manera, en opinión del autor, de mejor manera que con el inductivismo.

[53] Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional y División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma Metropolitana unidad Azcapotzalco

## Marco teórico

La didáctica nos ayuda a tener métodos para acercar temas tan complejos, como lo es este, de formas más naturales a los alumnos. Nos ayuda a que cuando un concepto nuevo sea introducido puedan verlo de manera en la que ellos lo puedan ver en su vida cotidiana y después alejarlo de la misma para que así conozcan los conceptos por lo que son y no por aplicaciones y evitar confusiones.

La Zona de Desarrollo Próximo (ZDP), es un modelo que nos ayuda a saber si realmente se le está enseñando al alumno o se le están pidiendo cosas fuera de su alcance, siempre debe de estar en crecimiento constante y debe estar siendo siempre estimulado mediante pequeños retos que cada vez vayan creciendo tanto en abstracción como en complejidad.

## Desarrollo

El plan de clase será presentado separando cada una de las etapas del conocimiento.

### Etapa de exploración

La intención de esta etapa es conocer las ideas que tienen los alumnos con respecto al tema y darles un primer acercamiento al mismo. Tiene como objetivo conocer fortalezas y deficiencias en el alumnado, para poder generar conocimientos de manera efectiva en el grupo.

Usaremos para ello una actividad diagnostica lúdica con la cual podremos observar las ideas y algunos conocimientos espaciales y geométricos del grupo.

### Actividad diagnóstica:

Se les proporcionará a los alumnos una copia la cual tendrá la gráfica siguiente:

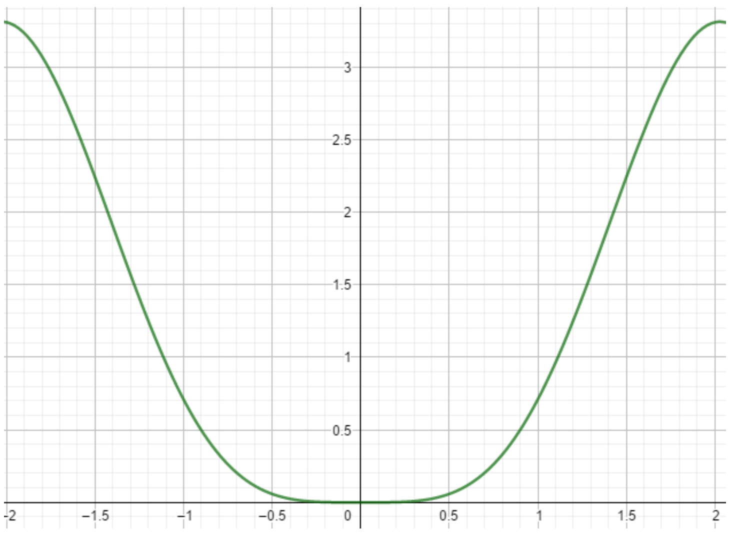



Figura 1.- Gráfica a entregar para la actividad diagnostica.

Además de una hoja de color, se les pedirá que llenen el área que encierra la curva usando las formas que quieran, recortándolas con de la hoja de color. La única condición que se les pondrá para elegir la forma es que solo podrán ser rectángulos, cuadrados, círculos o trapecios.

La condición nos servirá para que posteriormente puedan dar una aproximación del área, la cual es exactamente de $\frac{8}{3} - \frac{7sin(4)}{4} - cos(4) \approx 4.6447$.

Posteriormente se les pedirá reunirse en equipos para que cada uno discuta la solución que propone con sus demás compañeros, los cuales se rotaran cada 5 minutos para que así puedan hacerlo con el mayor número de personas en el grupo posible.

**Etapa de introducción**

En esta etapa, con la información obtenida de la etapa de exploración comenzamos a mostrarles el concepto de integral partiendo de cosas cotidianas, es importante que se haga con lo obtenido en la etapa anterior ya que permitirá explicar el concepto de manera gradual de acuerdo con el entendimiento del grupo con su experiencia de la vida cotidiana o ideas que fueron adquiriendo por cursos previos. Se comenzará a tener un nivel más alto de abstracción alejando los problemas o ejemplos de su entorno cotidiano. La importancia de esta esta etapa reside en que es en el momento en que se empiezan a confrontar las ideas previas que tenían, y mostraron, en la etapa de exploración con las que son las correctas.

**Sociograma**

Lo primero que haremos en esta etapa será un sociograma, ya que de la actividad diagnostica tendrán una idea de cómo se desarrollan algunos compañeros en un trabajo en equipo, con esto podremos tener un buen acercamiento a los equipos efectivos dentro de la clase.

**Actividad sociograma:**

A los alumnos se les pedirá responder de la forma más honesta posible, todas las respuestas que pongan no se les darán a conocer, solo serán revisadas y usadas por el profesor a cargo para crear grupos de trabajo.

1. De tus compañeros de clase, ¿con quién te sientes mejor trabajando en proyectos y/o tareas?
2. Si tuvieras una duda de la clase, ¿a cuál de tus compañeros le pedirías que te asesorara?
3. ¿Con cuál de tus compañeros podrías platicar un problema personal?
4. ¿Con cuál de tus compañeros se te dificultaría más trabajar y por qué?

Como un ejemplo de cómo formar los equipos, tomaremos un grupo de 16 personas las cuales, en forma de diagrama, pusieron las siguientes respuestas:

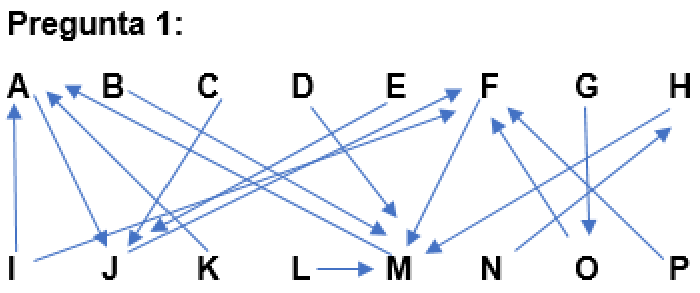



Figura 2.- Esquema de las respuestas a la pregunta 1.

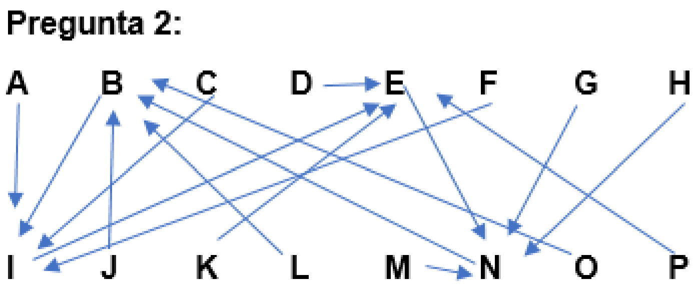



Figura 3.- Esquema de las respuestas a la pregunta 2.

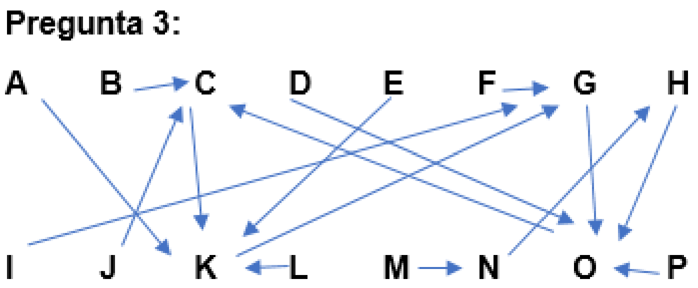



Figura 4.- Esquema de las respuestas a la pregunta 3.

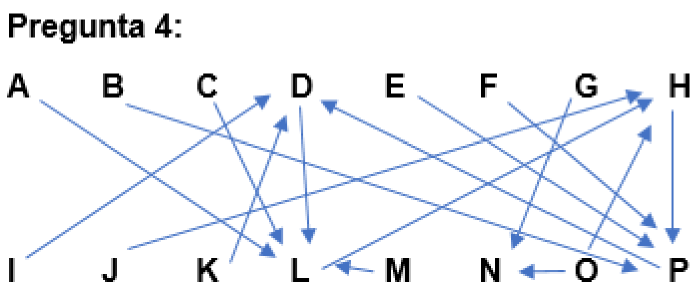



Figura 5.- Esquema de las respuestas a la pregunta 4.

Con estas respuestas se recomienda formar los equipos de la manera siguiente:

Tabla I. Propuesta de equipos con base en sociograma.

| Equipo 1 | Equipo 2 | Equipo 3 | Equipo 4 |
|---|---|---|---|
| **A** | E | I | M |
| **B** | F | J | N |
| **C** | G | K | O |
| **D** | H | L | P |

Con esto tenemos un líder de cada tipo (académico, de trabajo y afectivo) en cada uno de los equipos, más en cada equipo se integró a otra persona la cual no tenía ningún tipo de liderazgo definido para sus compañeros.

Ahora daremos cuatro actividades las cuales se encuentran en un contexto cotidiano para los alumnos, los cuales coinciden en complejidad y abstracción a la etapa de introducción de concepto. Además de contar con algunos cambios de representaciones para comenzar a introducir la idea abstracta del tema.

**Actividades con contexto**

1. Para hacer un pastel se rocía un molde con aceite para evitar que se pegue, en la pastelería “Puma en chapopote” se hacen pasteles por pedido no importa que tan difíciles parezcan, un día llego una persona a encargar un pastel de una forma un tanto extraña, para poder hacerlo consiguieron moldes con la siguiente forma:

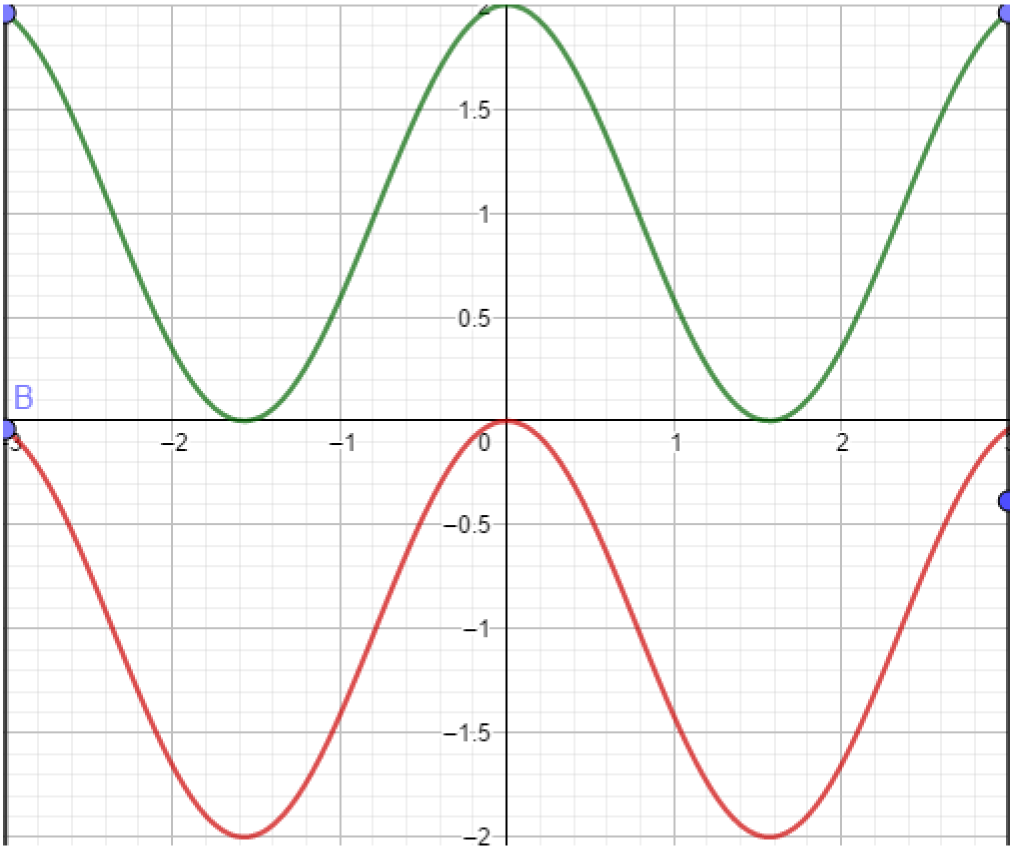



Figura 6.- Representación gráfica del problema 1.

Se tiene una máquina la cual se encarga de rociar el aceite, pero está solo puede hacerlo en forma de rectángulos, los cuales pueden variar libremente las medidas de los lados, pero una vez comenzado el proceso no se pueden cambiar. Se asegura que las partes donde se rocié el aceite no se les pegara nada de pastel, diga las medidas de estos rectángulos si se quiere que la cantidad de pastel que se pegue sea menor a 0.5 $cm^2$.

2. Un arquitecto debe de medir el área un terreno el cual tiene la forma siguiente:


Figura 7.- Representación gráfica del problema 2.

Para medir el área de este solo cuenta con un metro, así que decidió hacerlo usando rectángulos que estén dentro del terreno. ¿Cuál sería una buena aproximación del área este terreno, considerando que solo tiene permitido equivocarse por menos de un metro cuadrado del área real?

3. Un niño quiere hacer un papalote en forma de mariposa, para esto necesita recortar su papel china donde las alas tienen la siguiente forma:

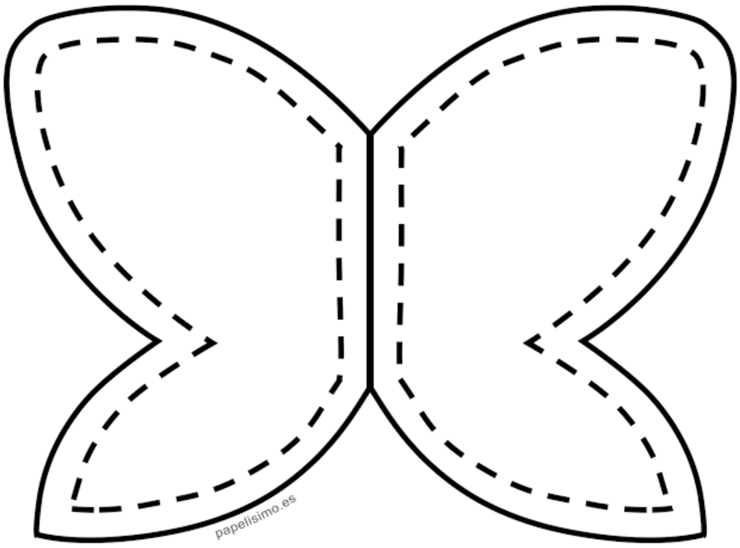



Figura 8.- Representación gráfica del problema 3.

Si los consideramos las dos partes de cada ala como una parte de un círculo, ¿Cuál sería la cantidad de papel que usaría para recortar las alas si el circulo más grande es de 20 cm de diámetro y el más chico es de 15 cm de radio?

4. Un sombrerero necesita recortar de un pedazo de piel que si se grafica se comporta como la función $e^{-x^2}$x de -2 a 2.
   Calcule el área del sombrero.

**Actividad con graficadores y simuladores**

Se usará un graficador que se hizo utilizando Java, el cual dada una función la gráfica con los ejes “x” y “y” y colorea la parte que representa la integral de la función en un intervalo dado, con la intención de que comiencen a asimilar y comprender que pueden existir “áreas” negativas y que no es “el área bajo la curva”.

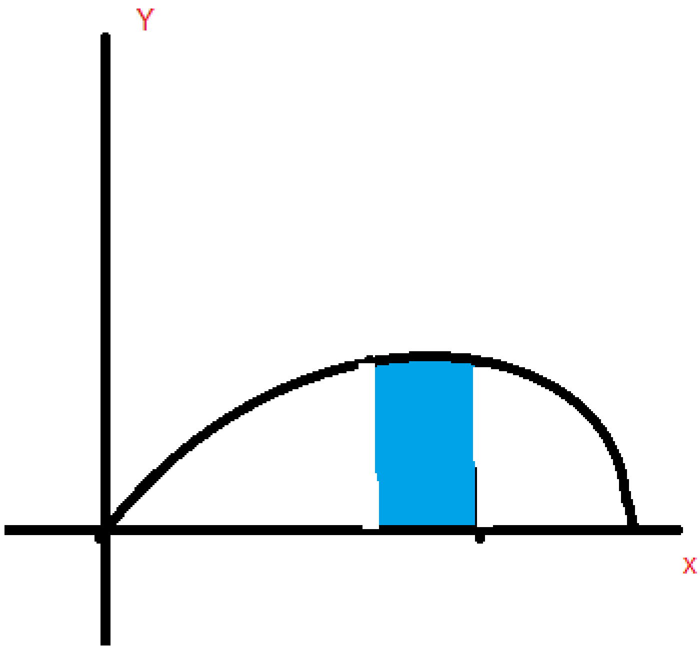



Figura 9.- Ejecución del graficador.

También se hará como actividad el uso de un simulador, también hecho en Java, el cual nos grafica la función y aproxima mediante rectángulos la integral de una función.

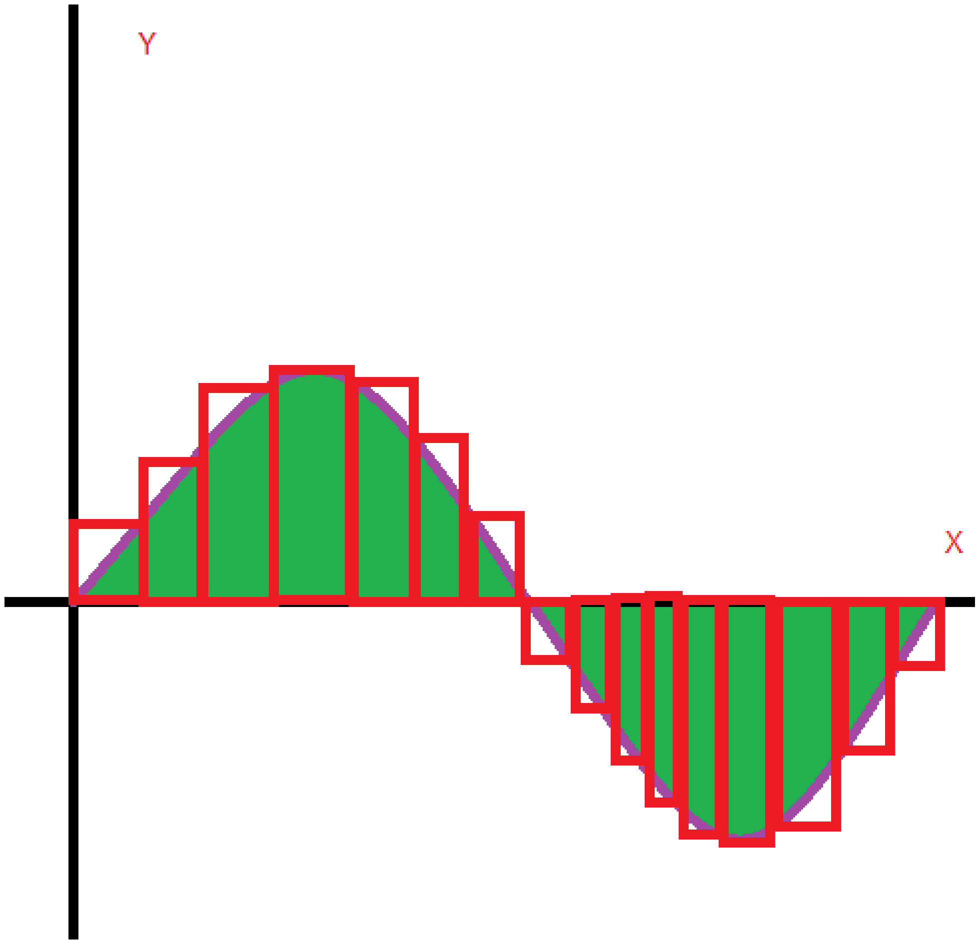



Figura 10.- Ejecución del segundo graficador para la actividad.

**Etapa de estructuración**

En esta etapa se les empieza a dar forma y rigor a las ideas presentadas en la etapa anterior, haciendo a las mismas lo más abstracto posible, de acuerdo al nivel, para evitar confusiones al momento de ver aplicaciones.

Aquí se les enseñará como método de integración solamente las integrales directas por medio de tablas de funciones, usando la que ponemos a continuación:

$$\int x^n \ dx = \frac{1}{n+1} \ x^{n+1} \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} \ dx = \log \mid x \mid$$

$$\int e^x \ dx = e^x$$

$$\int a^x \ dx = \frac{a^x}{\log a}$$

$$\int \operatorname{sen} x \ dx = -\cos x$$

$$\int \cos x \ dx = \operatorname{sen} x$$

$$\int \tan \ x \ dx = -\log |\cos x|$$

$$\int \cot \ x \ dx = \log |\operatorname{sen} x|$$

$$\int \sec x \ dx = \log |\sec x + \tan \ x| = \log \left|\tan \ \left(\frac{1}{2} \ x + \frac{1}{4} \ \pi\right)\right|$$

Figura 11.- Integrales inmediatas parte 1.

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} \ dx = \frac{1}{2}\arctan \ \frac{x}{a} \quad (a > 0)$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2} \ dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen} \ \frac{x}{a} \quad (a > 0)$$

$$\int \left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}} \ dx = \frac{x}{8}\left(5a^2-2x^2\right)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{3a^4}{8}\operatorname{arcsen} \ \frac{x}{a} \quad (a > 0)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \ dx = \operatorname{arcsen} \ \frac{x}{a} \quad (a > 0)$$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2} \ dx = \frac{1}{2a} \log \left|\frac{a+x}{a-x}\right|$$

Figura 12.- Integrales inmediatas, parte 2.

Se pondrán 10 ejercicios en los cual se les pedirá que calculen la integral dada con la intención de que puedan distinguir como se usan las tablas y que pueden tener varias formas de presentarse:

1. $\int cot(a)\, da$
2. $\int x^n dn$
3. $\int y^5 dy$
4. $\int cos(t) dt$
5. $\int sen(p) dp$
6. $\int \frac{dx}{x}$
7. $\int e^u du$
8. $\int \frac{dh}{h^2+x^2}$
9. $\int \frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}}$
10. $\int \frac{dk}{x^2-k^2}$

**Q-sort**

A los alumnos se les dará la siguiente actividad:

En México existe una institución llamada CONEVAL (Consejo Nacional de Evaluación de la Política de Desarrollo Económico), se hacen mensualmente evaluaciones para generar la línea del bienestar mínimo, con la cual se mide como cambia el ingreso mensual mínimo para poder satisfacer las necesidades básicas por persona, se diferencia entre zonas urbanas y zonas rurales.

Durante el 2019 la gráfica obtenida fue la siguiente para las zonas urbanas:

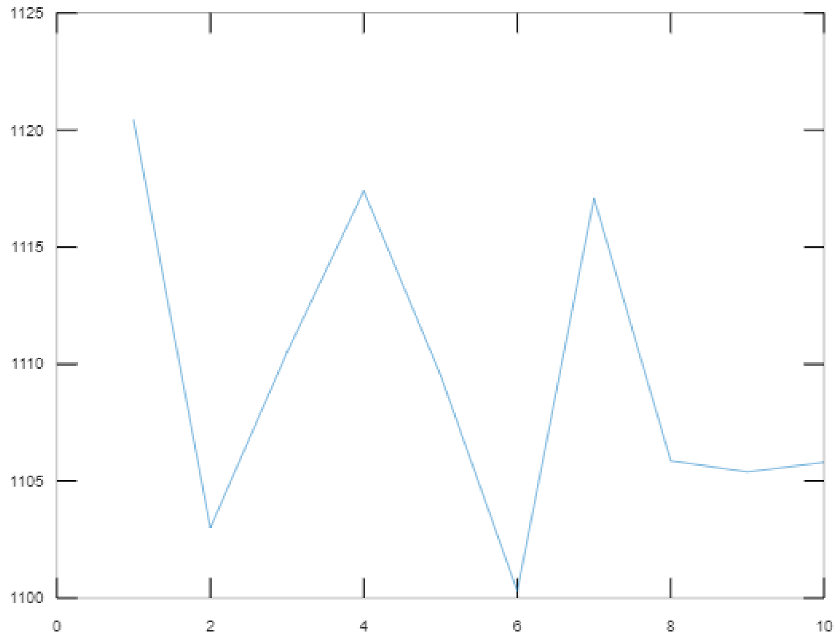



Figura 13.- Grafica de la actividad de Q-sort.

El área bajo la curva mide el porcentaje de la población la cual obtiene ingresos inferiores a este mínimo establecido.

1. Obtenga dicho porcentaje y diga si cree que es poca población o mucha población.
2. Si estuvieras a cargo de tu comunidad, ¿Qué medidas o acciones implementarías para poder cambiar dicho porcentaje?

Deberán hacerlo en una hoja en blanco, la cual entregaran al profesor, con su nombre atrás, para posteriormente mostrárselos a los alumnos (preferentemente pegados en el pizarrón o en alguna pared para evitar que volteen las hojas y vean quien hizo cada trabajo), posteriormente entre todo el grupo se decidirá que trabajo era el que mejor se resolvió, dando razones por las cuales eligieron ese. También se hará lo mismo para el cual crean fue el que tuvo más errores.

**Diferenciador semántico**

El diferenciador semántico tiene como finalidad aclarar dudas en conceptos que los alumnos tienen comúnmente, en el presentado aquí se presentará el caso de los conceptos de valor variable y valor constante.

Tabla II. Diferencias en los conceptos de variable y constante.

| Variable | Constante |
|---|---|
| Valor que cambia | Valor que no cambia |
| Hace que la función cambie en un intervalo de manera “abrupta” (cambia la forma de la gráfica) | No cambia el comportamiento de una función de manera significativa (No cambia la forma de la gráfica) |
| Si la función tiene una variable solamente, hace que la función cambie en un intervalo | Si la función tiene solamente una constante no tiene cambios la función en ningún intervalo. |

Después de presentar la tabla anterior se pondrán los siguientes ejemplos para los cuales los alumnos tengan que decir si tiene propiedades de valor variable o de valor constante.

1. $x^2$ con x entre 0 y 1.
2. $t$ con x entre 20 y 30 000.
3. $a$ en la función $f(u) = \frac{3cos(u)}{2a}$ con u entre 3 y 5.
4. $w$ en la función $5log(|w|) + 2z$ con w entre -10 y 10.

**Mapa conceptual**

Se les pedirá a los alumnos, al final de esta etapa hacer un mapa de la integral, el cual se enfocará solamente en el aspecto del concepto de la misma más que en la forma de como calcularla, para efectos de cálculo de las mismas, solo contaran con las integrales inmediatas dadas en la tabla. Un ejemplo de esta actividad es el mostrado a continuación.

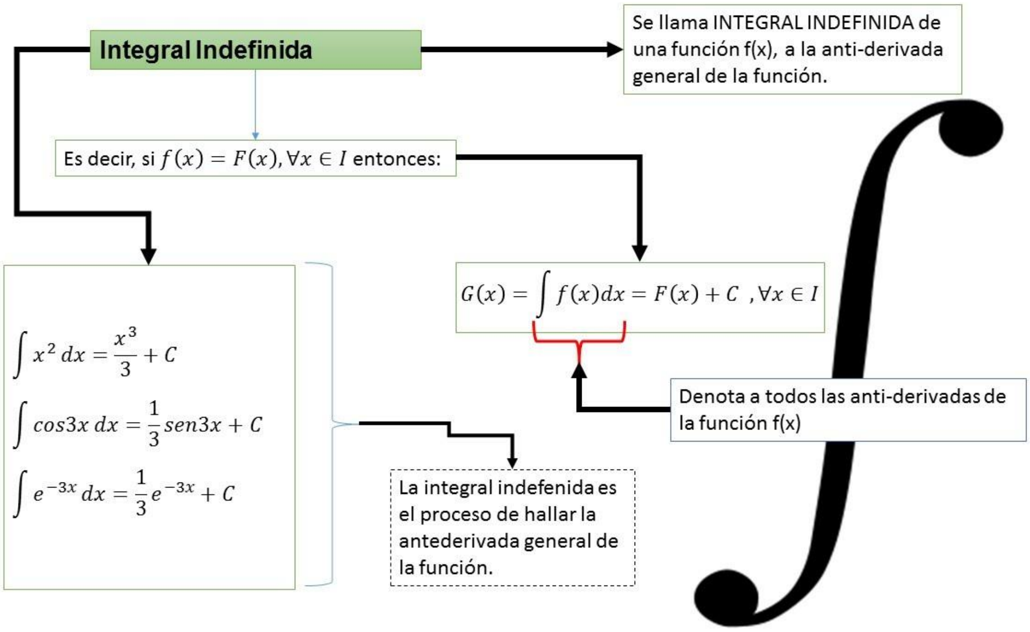



Figura 14.- Ejemplo de mapa del concepto de integral.

### Etapa de aplicación

En esta etapa, que es la final del aprendizaje, tiene como intención que los alumnos muestren que conocen el concepto mediante aplicaciones en el mundo cotidiano o en un contexto alejado al suyo. Además de que, en el caso de este plan de didáctica, se propondrá un proyecto en donde ellos vean que se aplica el tema visto durante las clases de las etapas anteriores.

### Problemas con contextos alejados de la cotidianeidad.

1. Se sabe que cuando se quiere calcular probabilidad de que las acciones de IBM tengan un precio que este entre cierto rango de precios se calcula la integral siguiente

$$\int_a^b e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}x}\,dx$$

   Donde a representa el valor mínimo del intervalo y b el valor máximo del intervalo.

   Calcule la probabilidad de que las acciones estén en un rango entre 145 y 163.

## Proyecto

Al final del curso los alumnos en equipos, los cuales ya se formaron mediante el sociograma en la etapa de introducción se les dejará que ellos elijan una aplicación de la integral en el contexto en el que ellos lo deseen, deberá tener la siguiente estructura:

1. Introducción, aquí se deberá describir brevemente el planteamiento del problema evitando usar el uso de los tecnicismos.
2. Desarrollo, en donde ellos digan como la integra resuelve el problema planteado anteriormente.
3. Conclusiones, deberán de responder al por que la integral deberá de ser usada, y en caso de que esté al alcance de los alumnos, decir qué ventajas tiene respecto a usar un método diferente.

Para facilitar un poco la búsqueda, se les apoyara diciéndoles las siguientes aplicaciones que llega a tener en diferentes áreas:

- En el área de médico-biológicas: obtención de valores para los cuales, en estudios de laboratorio se tiene una enfermedad (por ejemplo, saber valores extremos de la azúcar en sangre para los cuales se puede decir que una persona padece diabetes o es hipoglucémica).
- En el área de humanidades y sociales: Distribución de la población, con respecto a ciertos indicadores (económicos, de recursos naturales, etc.…).
- En el área de fisicomatemáticas: Inercia rotacional de un objeto.

## Aprendizajes esperados

Con todo lo desarrollado en este plan de clase se tiene un acercamiento mas gradual en complejidad y abstracción el cual se observa en la progresión de los problemas y ejercicios planteados. Todo se construye tomando en cuenta una mayor diversidad a la planteada en los programas de clases convencionales.

Con la actividad diagnóstica se comienza a hacer un acercamiento al concepto de integral de manera más lúdica y visual, para que al momento de que se les presente puedan visualizarlo con mayor facilidad ya como algo tangible a pesar de ser un concepto abstracto. Mientras que con la actividad de Q-sort se logra incluir una problemática de valores en la sociedad, cosa que se ha ido abandonando en el contexto de las aulas.

## Referencias

Chalmers, A. F. (1990). *¿Qué es esa cosa llamada ciencia? Una valoración de la naturaleza y el estatuto de la ciencia y sus métodos.* México: Siglo ventiuno editores s.a. de c.v.

CONEVAL. (Noviembre de 2019). *Medición de la pobreza*. Obtenido de https://www.coneval.org.mx/Medicion/MP/Paginas/Lineas-de-bienestar-y-canasta-basica.aspx

Ozámiz, D. G. (1993). *Enseñanza de las Ciencas y la Matemática Tendencias e Innovaciones.* Organización de Estados Iberoamericanos.

# Interrogatorio-Retinoscopia
# La importancia de cada prueba

Lucio Alemán Rodríguez[54], Alejandra de las Mercedes Morales Argáez[55],
Alejandra Ibarra Morales[56] Brenda Rojas Riquer[55]
lalemanr@hotmail.com

## Resumen

En el actual plan de estudios de la Licenciatura en Optometría del IPN, se incluyen las materias de Propedéutica Clínica y Refracción Ocular, cuyos propósitos respectivos son: enseñar al alumno a conocer el motivo de consulta del paciente, y realizar de manera exacta la corrección refractiva. Sin embargo, se ha observado que al impartirse en asignaturas diferentes los alumnos al llegar a la Clínica de Refracción, no logran relacionarlas, considerando solo la aplicación de la segunda parte. Lo que plantea una actividad llamada: Para ser un excelente optometrista ¿basta con hacer una retinoscopía exacta? Cuyo objetivo es integrar ambos conocimientos.

## Objetivo

Diseñar una herramienta que permita al alumno asociar la prueba de retinoscopía con la identificación del motivo de consulta del paciente.

## Marco Teórico

Cuando una persona se presenta en la consulta de Optometría, lo primero que se realiza es el abrirle un expediente clínico, el cual es un conjunto único de información y datos personales de un paciente, que se integra dentro de todo tipo de consultorio para la atención médica, ya sea público, social o privado, el cual consta de documentos escritos, gráficos, imagenológicos, electrónicos, magnéticos, electromagnéticos, ópticos, magneto-ópticos y de cualquier otra índole, en los cuales, el personal de salud deberá hacer los registros, anotaciones, en su caso constancias y certificaciones correspondientes a su intervención en la atención médica del paciente, con apego a las disposiciones jurídicas aplicables.

El realizar la Historia Clínica o Historia del Caso tiene como objetivo por medio de **la anamnesis o interrogatorio** obtener la máxima información del paciente, con el fin de intuir cuál es el problema que se presenta. Esto nos ayuda a **seleccionar las pruebas clínicas optométricas** más adecuadas para cada caso.

En el caso de Optometría la historia clínica se realiza en un documento denominado “Ficha optométrica”, en la que será depositada toda la información proporcionada por el paciente.

El interrogatorio es un cuestionario que debe tener en cuenta distintos aspectos:

---

[54] CICS-UST IPN
[55] CICS-UST IPN
[56] ICN-UNAM

1. Historia del caso
   1.1 Información general (referida a los datos personales del paciente)
      - Nombre y apellidos
      - Dirección, número de teléfonos (casa, trabajo, celulares) y dirección electrónica
      - Fecha de nacimiento
      - Ocupación
      - Pasatiempos
      - Tiempo frente a dispositivos electrónicos (computadora, Tablet, celular)
   1.2 Motivo de la consulta o queja principal
      - ¿Cuál es su molestia? Todo el procedimiento del examen irá orientado hacia la eliminación del problema.
      - Sintomatología: visión borrosa de lejos, de cerca, intermitente, al pasar de cerca a lejos, dolor de cabeza, escozor, dolor de ojos, lloriqueo, diplopia, percepción distorsionada de objetos, sensación de movimiento de las letras al leer…
      - ¿dónde? ¿cuándo? ¿con qué frecuencia? Localización del dolor de cabeza, intensidad de la molestia
   1.3 Historia ocular del paciente
      - Fecha de la última revisión
      - Refracción habitual y frecuencia de uso: ¿ha usado lentes de armazón o lentes de contacto? ¿cuándo se los puso por primera vez? ¿ha cambiado la graduación a menudo? ¿cuándo fue? ¿se siente a gusto con ellos?...
      - Información adicional sobre factores de riesgo: ¿alguna vez ha experimentado la percepción de flashes de luz, moscas volantes, halos alrededor de las luces, visión doble? ¿ha tenido que llevar parche en algún ojo por alguna razón? ¿recuerda haberse dado algún golpe en el ojo o en la cara alrededor del ojo?...
      - Necesidades visuales del paciente: ¿cuál es su trabajo? ¿cuál es su afición preferida? ¿practica algún deporte?...
      - Información sobre factores del entorno: iluminación, distancia de trabajo, postura, condiciones de ventilación en el lugar de trabajo habitual…
   1.4 Historia médica del paciente
      - Estado general de salud, alergias, migrañas, hipertensión, diabetes…
      - Medicación actual. En caso afirmativo: motivo, dosis, frecuencia de toma, duración del tratamiento…
      - Tiempo y lugar del último chequeo general
   1.5 Historia ocular familiar
      - Antecedentes familiares de cataratas, glaucoma, ceguera, estrabismo, astigmatismo elevado, miopía…
   1.6 Historia médica familiar
      - Antecedentes de diabetes, hipertensión, migrañas…
   1.7 Observación general (permite un mayor conocimiento del paciente)
      - Anomalías físicas: malformaciones generales, de espalda, faciales, inclinación del cuello…

- Asimetrías faciales: posición de ojos desplazados vertical y/o horizontalmente…
- Desviaciones oculares
- Comportamiento personal: nervioso, reservado, aprensivo…

**2.** Consideraciones especiales en niños.

Además de la información obtenida en los apartados anteriores, deben tenerse en cuenta una serie de observaciones complementarias en estos pacientes, como:

2.1 Antecedentes obstétricos

- Evolución del embarazo, problemas en el parto, necesidad de incubadora o administración de oxígeno…

2.2 Historia del desarrollo motor

- Edad en que empezó a gatear, a caminar…

2.3 Historia del comportamiento general

- Presencia de tics, muecas, parpadeo excesivo, tendencia a frotarse los ojos…
- Problemas de lectura: falta de concentración, inversión de palabras o letras o dislexia, movimientos de la cabeza al leer, leer en voz alta, seguir la lectura con el dedo…
- Malas posturas: al escribir, mirar la televisión, inclinación de la cabeza…
- Mal rendimiento en el colegio
- Comportamiento: extremadamente inquieto, demasiado calmado…
- Existencia de más hermanos
- Dominancia de mano y pie

**3.** Consideraciones en pacientes con baja visión

Teniendo en cuenta que la problemática de estos pacientes difiere de las características generales descritas hasta ahora, la anamnesis, así como el examen refractivo que debe llevarse a cabo, tiene que ser algo diferente.

Podríamos dividir la historia del caso en dos apartados distintos:

- Uno constituido por el informe oftalmológico del paciente donde debe constar el diagnóstico, pronóstico y tratamiento de la enfermedad.
- Otro encaminado a cubrir las necesidades del paciente basándose en cómo utilizar la visión residual, las áreas problemáticas a tratar y el objetivo de la rehabilitación.

3.1 Información general

- Datos personales
- Si pertenece a alguna sociedad o entidad para personas con problemas visuales
- Cuánta gente conoce su problema visual

3.2 Historia ocular del paciente

- Inicio de la deficiencia visual: cuando, si fue de súbito o paulatino, si progresa o no la deficiencia…
- Fecha de la última revisión y nombre de su especialista. Periodicidad de las revisiones.
- ¿Ha estado en tratamiento o ha sufrido algún tipo de cirugía en los ojos? ¿está actualmente en tratamiento?

- Situación actual: ¿ha experimentado recientemente cambios en su visión? ¿cómo le parece que está viendo actualmente?...
- Conocimientos del paciente acerca de su enfermedad: ¿cuál le han dicho que es la causa de su baja visión? Explíqueme lo que le ocurre, ¿cuándo se dio cuenta por primera vez que tenía un problema visual?...
- Visión de lejos: ¿ve los rótulos de las calles? ¿el letrero del autobús o de las casas? ¿reconoce caras a distancia? ¿aproximadamente a cuál? ¿va al cine, teatro o espectáculos? ¿ve la televisión? ¿puede ver la pantalla o solo una parte de la misma? ¿reconoce el color de los semáforos, ropas, coches, etc.? ¿ve mejor unos días que otros?...
- Visión de cerca: ¿qué tipo de letras puede leer? Titulares de periódico, letras mayúsculas, libros de texto, letra a máquina, periódicos y revistas, listas telefónicas, medicamentos, ¿a qué distancia? ¿cuánto rato? ¿qué tipo de luz utiliza para leer? ¿leía más antes de su problema visual? ¿le gustaría leer más rato de lo que actualmente está haciendo?

3.3 Historia médica y familiar del paciente

Sirven como referencia las preguntas expuestas en los apartados similares descritos anteriormente.

3.4 Estilo de vida

- ¿Cuál es o ha sido su ocupación?
- Actividades que está practicando actualmente o practicaba antes de su problema visual: coser, hacer ganchillo, jugar cartas, tocar algún instrumento musical, conducir, montar en bicicleta, practicar algún deporte, escribir a máquina, trabajar con computadoras, hacer pequeños trabajos de bricolaje…
- ¿Vive solo o con su familia?
- Dificultades en su casa, en el trabajo, en la escuela…
- Detalles de sus actividades cotidianas ¿cómo ocupa su tiempo durante el día?...

3.5 Historia de la movilidad

- Capacidades del paciente: ¿sale solo por la calle? ¿acompañado? ¿en lugares conocidos? ¿en lugares que no le son familiares? ¿de día? ¿de noche? ¿cruza las calles solo? ¿utiliza bastón o un perro? ¿tiene dificultad en desplazarse en lugares cerrados conocidos o desconocidos? ¿al andar su paso es seguro?

3.6 Iluminación

- Dificultades específicas ¿ve mejor o se siente más seguro cuando hay luz y sol, visera o gorra? ¿tiene más problemas durante el día o la noche? ¿en interiores o en exteriores? ¿utiliza más iluminación para mejorar su visión?

3.7 Experiencia con ayudas ópticas

- Información acerca de qué tipos de ayuda conoce, dispone o le gustaría disponer
- Interés personal ¿las ayudas que tiene, las ha obtenido por su cuenta o alguien se las ha proporcionado? ¿le importaría

utilizarlas en lugares públicos, en la calle, en espectáculos, con los amigos o la familia?

3.8 Objetivos del paciente

- Aspiraciones respecto a las actividades que desean llevar a cabo: en visión de lejos o de cerca, sentirse más independiente, realizar lecturas personales, trabajo escolar, sus actividades cotidianas, mejorar su movilidad y desplazamiento, sus aficiones…

La característica de los exámenes objetivos es que el resultado únicamente se basa en la observación realizada por el optometrista, sin tener en cuenta las apreciaciones del paciente. Estos exámenes pueden servir para realizar diagnósticos diferenciales al compararlos con exámenes subjetivos. También se pueden utilizar como examen diagnóstico en aquellos casos en que el paciente no colabora en los exámenes subjetivos (como en el caso de niños pequeños, deficientes mentales, baja visión, …).

El éxito de estos exámenes radica en la experiencia y los conocimientos del examinador.

La retinoscopia es una prueba objetiva, con la que se determina el error refractivo del paciente, sin que este intervenga en el resultado. Es quizá la técnica más importante que debe dominar un optometrista, ya que, aparte de determinar el error refractivo, también obtenemos información cualitativa del sistema visual mediante la observación de las características del reflejo retiniano (intensidad del reflejo, fluctuaciones de intensidad, fluctuaciones del diámetro pupilar, …).

El objetivo de esta prueba es determinar su estado refractivo, principalmente en visión lejana (ya que existen variaciones en la técnica de acuerdo a las características del paciente) en pacientes que colaboran manteniendo la atención sobre el optotipo.

Para realizar la retinoscopia se requiere un esquiascoscopio o retinoscopio, caja y armazón de prueba o foroptor y optotipos de visión lejana.

Técnica:

- Primero se ha de ajustar el armazón de prueba o foroptor con la distancia interpupilar del paciente; a continuación, se reduce la iluminación ambiental, situarse a 50 cm de los ojos del paciente para realizar la observación
- Observar la franja retinoscópica (determinar anchura, color y brillo) en todos los meridianos, con el espejo plano
- Determinar los meridianos principales (que son aquellos en los que hay un valor máximo o mínimo de la anchura de la franja intrapupilar y, en caso de no haber diferencia, serán por defecto a 90° y 180°)
- Elegir uno de los meridianos principales.
- Si se observa franja o movimiento directo, añadir lentes esféricas positivas hasta hallar el punto neutro (que es el reflejo intenso en el cual no apreciamos ni franja ni sombras) en ese meridiano.

- Si se observa movimiento inverso, añadir lentes esféricas negativas hasta hallar el punto neutro en ese meridiano.
- Observar el otro mediano principal (rotando 90°) determinando la existencia de reflejo retinoscópico:
    - Si persiste el punto neutro estamos ante una ametropía esférica
    - Si aparece franja estamos ante una ametropía astigmática; situar el eje del cilindro neutralizador en la misma dirección de la franja retinoscópica (dirección del meridiano neutralizado con esferas), de forma que: si se observa franja o movimiento directo, añadir lentes cilíndricas positivas hasta hallar el punto neutro en ese meridiano
    - Si se observa franja o movimiento inverso, añadir lentes cilíndricas negativas.
- Al finalizar comprobar que todos los meridianos se encuentren en punto neutro.

Observaciones:

- Asegurarse de no obstruir en ningún momento la observación del optotipo de lejos al paciente
- Nos podemos encontrar que no podemos apreciar el reflejo retinoscópico por tener un reflejo apagado o por no distinguir los bordes de la franja o la sombra:
    - En este caso nos aproximaremos al paciente para observar mejor el reflejo o las sombras, o añadiremos una lente esférica de potencia media positiva o negativa.
    - Valorar de nuevo en estas condiciones el estado refractivo.
- En caso de hallar sombras en tijeras puede ser debido a:
    - Que estamos neutralizando un meridiano diferente al de los ejes principales
    - Que el paciente está sometido a dilatación pupilar
    - La presencia de un queratocono
    - Córneas irregulares por cicatrices
    - Casos en que el paciente ha sido intervenido de cirugía refractiva

## Desarrollo

Como se observa en la clínica, los alumnos muchas veces no toman en cuenta el interrogatorio que le realizaron al paciente, y, se concretan a pasar de la toma de agudeza visual a realizar la retinoscopía. Por lo que se decidió hacer un cuadro comparativo de cuando sí se debe hacer la retinoscopía o bien cuando aplicar alguna otra prueba.

| Interrogatorio | Respuesta | Retinoscopia |
|---|---|---|
| Edad de inicio | Niño/Adolescente/Adulto joven | ✓ |
| | Adulto (a partir de los 26 años) | X |
| Visión borrosa de lejos | Si | ✓ |
| Visión borrosa de cerca | Si | ✓ |
| Brincan los renglones durante la lectura | Si | ✓ |
| Ha usado lentes (armazón o contacto) | Sí | ✓ |
| Su última graduación tiene más de una año | Sí | ✓ |
| Ha experimentado la percepción de flashes de luz | Sí | X |
| Ha percibido moscas volantes | Sí | X |
| Ha notado halos de colores alrededor de las luces | Sí | X |
| Tiene últimamente visión doble | Sí | X |
| Ha tenido que llevar parche por alguna razón | Sí | X |
| Se presenta por haber recibido un golpe en la cara | Sí | X |
| Se presenta por haber recibido un golpe directamente en el ojo | Si | X |
| En su último examen de glucosa (azúcar) sus niveles salieron fuera de parámetros | Sí | X |
| La última toma de su presión arterial estaba fuera de límites | Sí | X |
| Le han dado un diagnóstico de catarata | Sí | ✓ |
| Tiene diagnóstico de glaucoma | Sí | X |
| Presenta algún tipo de secreción en sus ojos | Sí | X |
| Actualmente está en tratamiento farmacológico bajo la supervisión de un médico | Sí | ✓ |

## Aprendizajes esperados

El interrogatorio permite saber el motivo por el que se presentó el paciente a consulta, y por lo tanto las pruebas que se deben realizar al paciente para conseguir la recuperación de la salud visual del mismo. Es por esto que se diseñó un cuadro guía, donde se puede considerar que la aplicación de la retinoscopia va a ser la prueba más imponente para solucionar el motivo de consulta del paciente.

Esta guía tiene como finalidad el permitir al alumno, el analizar la queja o molestia “principal” que hizo entrar al paciente al consultorio, logrando por este medio el obtener un prediagnóstico, y considerar, o no, la aplicación de la retinoscopía.

Esta misma, será de ayuda al profesor encargado de supervisar los casos clínicos, en primer lugar, para valorar los conocimientos adquiridos por parte del alumno, al aplicar las pruebas correctas en el momento preciso, así como reforzar su autoestima como optometristas completos.

A manera de evaluación se realizó la pregunta: De acuerdo a tu interrogatorio ¿Es necesario hacer una retinoscopía? Con ese análisis el alumno aprenderá cuando debe enfocarse en la prueba retinoscópica.

**Bibliografía**

Dr. Alberto Milla Quiroz, O.M. (2007). Procedimientos clínicos de optometría. CDMX. Laboratorios Grin.

Vargas, J.J. (s.f.). optometría clínica & cuidado primario de la salud visual humana. Parte I. función visual. Clinikbox.

William, J. Benjamin Borish, Clinical Refraction. The Professional Press. Editorial Butterworth Heinemann. Año: 2006 vol. IUSA. ISBN 0750675241. Págs. 1694

Carlson, N. Kurtuz, D. Heath, D. Hines, C. Procedimientos Clínicos en el Examen Visual. Año 2005. ISBN 84-88476-01-9 Págs. 251

Herranz, R.M. (2000) Retinoscopía. http://www.sld.cu/galerias/pdf/sitios/optometría/retinoscopía.pdf

# ¿Cómo le pregunto a un niño? Interrogatorio pediátrico como orientación para el alumno en la integración del examen visual

Alejandra de las Mercedes Morales Argáez[57]
Alejandra Ibarra Morales[58]
Brenda Rojas Riquer[59]
ale_mercy@hotmail.com

Resumen

En la asignatura de Clínica Pediátrica, de la Licenciatura en Optometría, se considera básico el conocer el motivo que trae al paciente a consulta. Sin embargo, en el interrogatorio, por lo regular, el alumno en optometría, se lo realiza al acompañante adulto, quién podrá dejar de lado la indicación de los síntomas del afectado. Esta práctica puede generar una pérdida valiosa de información que solo podría proporcionar el paciente. Ante esta situación se plantea en clase un interrogatorio pediátrico, diseñado para ser acorde al lenguaje y nivel del paciente, y que permita un prediagnóstico más adecuado.

## Objetivo

Generar una herramienta que permita que los estudiantes de la Licenciatura en Optometría realicen un interrogatorio pediátrico a profundidad que les permita diagnosticar un error refractivo, una alteración en su visión binocular, o problemas en su visión perceptual; para poder aplicar las pruebas específicas que le permitan dar el tratamiento o terapia visual adecuados.

## Marco teórico

Llevar a cabo un examen visual en la población adulta es algo muy sencillo, ya que el paciente tiene la capacidad de comunicarse e interactuar fácilmente con el especialista. Esto no ocurre de igual modo con los pacientes pediátricos. Pero, determinar si el niño padece alguna alteración en la vista o su visión, es algo que se recomienda hacer en edades muy tempranas. Cuanto antes se comience con el tratamiento optométrico el éxito del mismo será mayor.

Al tratarse de pacientes pediátricos, lo recomendable es que el test de la visión lo lleve a cabo un optometrista pediátrico, que disponga de las herramientas y los conocimientos oportunos para interactuar con niños. Los exámenes infantiles han de ser rápidos y divertidos, de manera que los pequeños no pierdan la concentración durante el proceso de análisis.

[57] Centro Interdisciplinario de Ciencias de la Salud, Unidad Santo Tomás del Instituto Politécnico Nacional
[58] Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México
[59] Centro Interdisciplinario de Ciencias de la Salud, Unidad Santo Tomás del Instituto Politécnico Nacional

El especialista tendrá que evaluar las respuestas del niño. Además, es importante que sepa leer entre líneas y analizar los gestos que hagan los pacientes durante la revisión optométrica. Cuando se trata de niños, a veces es más importante lo que hacen que lo que dicen, ya que es probable que no comprendan del todo el procedimiento.
En la actualidad, en la mayoría de las ópticas, no se brinda atención optométrica a la población pediátrica comprendida entre los tres y los diez años de edad. Ya sea por falta de "tacto" para trabajar con niños, la falta de equipo apropiado para atenderlos, o en algunos casos por falta de conocimientos en cuanto a cómo obtener los datos que precisamos de primera mano del paciente. Las edades referenciales a las que se debe examinar a un niño (siempre que no haya complicaciones) son:

Al nacer

9 meses

2 años

3 años, un primer examen de la vista exhaustivo

4 años

A partir de los 4 años, cada año.

Hay muchos optometristas y madres que esperan a que el niño tenga la madurez para contestar, o que se sepa las letras; los primeros por no saber cómo dirigirse a los pacientes, de manera tal que se obtenga la información que se precisa para hacer un diagnóstico, y las segundas porque al percibir esta falta de habilidad por parte del profesional, no confían en el examen optométrico. Cometen un gran error, porque el estado visual de un niño no se limita a ver si es capaz de leer unas letras de un optotipo situado a 5-6 metros. Hay muchas pruebas objetivas que revelan información sin necesidad de que el niño colabore.

El examen de un paciente pediátrico realmente no difiere mucho del examen rutinario que realizamos a pacientes de mayor edad. La diferencia real es saber escoger las preguntas adecuadas en el interrogatorio, para realizar la prueba adecuada y el momento adecuado para realizar dicha prueba.

Los procedimientos aquí descritos pretenden reforzar los siguientes puntos:

•Síntomas del paciente en particular

•La naturaleza y secuencia de la examinación

•Hallazgos clínicos

•El juicio profesional

## OTRAS INDICACIONES

- Hablar con el niño, explicarle dónde va, y qué se le va a hacer.
- Tranquilizarle, y transmitirle que no va a doler nada.
- Si es un niño tímido, poco colaborador, o con TEA, ir al centro un día antes, para que tenga una 1ª toma de contacto con el lugar y los profesionales

## Historia clínica

Todos los optometristas manejamos nuestra historia clínica personalizada de acuerdo a las necesidades o costumbres del área geográfica, sin embargo, algunas de las preguntas que toda historia clínica debe incluir son:

•Motivo principal de la consulta

•Historia visual y ocular

•Antecedentes generales patológicos y no patológicos (incluyendo historia prenatal, perinatal y postnatal)

•Historia médica familiar

•Historia del desarrollo del niño

•Rendimiento escolar del niño

Sin embargo, el primer paso de la historia clínica no se puede realizar mientras el alumno de Optometría no sepa cómo enfocar sus destrezas y conocimientos en el objetivo principal: el paciente pediátrico.

Las etapas asociadas a la realización del interrogatorio se subdividen en múltiples preguntas, las cuales se aplicarán según los resultados a obtenerse para conseguir los diferentes prediagnósticos. En la Tabla 1 se muestran las diferentes áreas que se deben de explorar y a quién van dirigidas las preguntas, así como la información que esperamos obtener.

Tabla 1. Temas a tratar de manera general y/o particular

| Pregunta | Mamá / Acompañante tutor | Paciente | Evalúa |
|---|---|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| Motivo de consulta | ✓ | ✓ | Los resultados que esperan obtener como mejora para el paciente |
| Problemas Refractivos | ✓ | ✓ | Signos y Síntomas del problema refractivo |
| Problemas Patológicos Oculares | ✓ | ✓ | Descartar o confirmar el origen de problemas de mala visión |
| Historia Prenatal | ✓ | | Descartar o confirmar alteraciones en el sistema visual anterior y/o durante la gestación |
| Historia Perinatal | ✓ | | Descartar o confirmar complicaciones durante el parto que comprometan al sistema visual |
| Historia Postnatal | ✓ | | Descartar o confirmar algún daño al sistema visual por agentes externos |
| Historia del desarrollo del niño | ✓ | ✓ | Descartar o confirmar alteraciones del sistema visual con repercusión en la visión binocular, la visión perceptual o en ambas |
| Rendimiento escolar | ✓ | | Descartar o confirmar alteraciones visuales o de visión |
| Historia Médica Familiar Visual | ✓ | | Descartar alguna alteración heredofamiliar |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Historia Médica Familiar Ocular | ✓ | | Descartar alguna patología ocular hereditaria |
| Historia Médica Familiar general | ✓ | | Descartar o confirmar alguna enfermedad hereditaria que tenga repercusiones oculares |

Desarrollo

Al igual que se reporta en la bibliografía la desconexión que hacen los estudiantes de los pacientes pediátricos es resultado de no saber hacer las preguntas correctas de modo correcto, descartando la valiosa colaboración del paciente, y siendo hasta el momento una parte escabrosa dentro de la historia clínica pediátrica, donde no se han encontrado propuestas que permitan apoyar a la práctica docente para corregir esta problemática. Ante esta situación se presenta una propuesta, basada en un interrogatorio acrecentado por 30 años de experiencia en el trabajo del día a día con pacientes pediátricos en el gabinete (Tabla 2), que deben hacer los alumnos para integrar las pruebas y sus resultados, a fin de dar un tratamiento integral.

La tabla se presenta con las siguientes características: En la primera columna se presentará la prueba, en la segunda, como se le haría la pregunta a la mamá o al tutor, en la tercera, opciones de planteamiento para que el paciente nos dé su respuesta desde su problemática, y en la última columna las posibles interpretaciones de las respuestas del niño.

| Prueba | Pregunta a mamá / tutor | Pregunta al niño | Interpretación |
|---|---|---|---|
| Motivo de consulta | ¿A qué debemos su visita? | ¿Sabes por qué estás aquí?<br>¿Sabes por qué te trajo tu mamá? | Si la respuesta es afirmativa, el paciente sabe, comprende o nota que tiene “un problema en sus ojos” |
| | | | Si la respuesta es negativa, debemos buscar las siguientes preguntas que sean más específicas y con |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | mayor variedad de explicaciones para que nos pueda dar información relevante. |
| Problemas refractivos | ¿Ha notado si el paciente tiene dificultades para ver a alguna distancia? (lejos, cerca, ambas) | ¿Cómo se ve la televisión? ¿Te acercas para verla mejor? ¿Cómo se ve el pizarrón? ¿Te gusta más correr que dibujar? ¿Se ve más bonito de cerca que de lejos? | Sí las dos primeras preguntas tienen como respuestas ve mal o feo, la tercera pregunta prefiere dibujar y para la cuarta su respuesta es que ve más bonito o mejor de cerca, tenemos como prediagnóstico miopía. |
| | | ¿Cómo se ve el celular/Tablet? ¿Cómo se ve el cuaderno? ¿Te gusta iluminar o jugar a encantados? | Sí las dos primeras preguntas tienen como respuesta que se ven mal o feo, la tercera pregunta contesta que prefiere jugar a los encantados, tenemos como prediagnóstico hipermetropía. |
| | | Cuando estás leyendo ¿Se te brincan los renglones? ¿Confundes las letras? ¿Confundes los números? Cuando te concentras en algo (leer, iluminar, etc.) ¿Parece qué quieres llorar o se te ponen rojos los ojos? | Si contesta sí, a cualquiera de las preguntas el prediagnóstico es astigmatismo. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | ¿Te da dolor de cabeza leer o iluminar?<br>Las letras, los números o tus dibujos ¿parece que tienen una sombra? ¿Hacia dónde se ve esa sombra? (arriba, abajo, derecha o izquierda | |
| Alteraciones en la visión binocular | Cuando lee ¿Le cuesta trabajo entender la lectura? | ¿Te aburre leer?<br>¿Entiendes mejor la lectura si alguien más la lee?<br>¿A veces lo que lees no tiene sentido?<br>¿Has notado, cuando lees, que cambias orden de las palabras en una oración? | Si contesta afirmativamente a la primera pregunta tiene como prediagnóstico fijación inestable<br>Si contesta afirmativamente las preguntas de la 2 a la 4, su prediagnóstico es que hay alteraciones en sus movimientos sacádicos. |
| | ¿Ha notado si se le desvía un ojo?<br>¿Siempre es el mismo ojo?<br>¿Todo el tiempo o sólo cuando hace algo de lejos o algo de cerca?<br>¿Hacia dónde se le desvía? (Adentro, afuera, arriba o abajo) | Tú ¿Has notado que uno de tus ojos ve en una dirección y otro en otra?<br>¿Cómo te das cuenta?<br>¿Puedes ver con un ojo u otro a tu gusto?<br>Alguna vez ¿Has visto doble? | Si contesta sí afirmativamente a alguna de las tres primeras el prediagnóstico es una foria y si contesta afirmativa la última pregunta el prediagnóstico es una tropia. |
| | ¿Ha notado si tiene problemas para copiar la tarea del pizarrón?<br>¿Utiliza celular, computadora o Tablet? | ¿Se ve borroso de cerca?<br>¿Te da comezón en tus ojos?<br>¿Te cuesta trabajo concentrarte en la lectura? | Si la respuesta es afirmativa para cualquiera de las preguntas el prediagnóstico es exceso o espasmo acomodativo. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | ¿Cuántas horas al día? | ¿Tienes dolores de cabeza después de leer?<br>¿Te molesta la luz?<br>¿Cuál, la solar la del foco o ambas?<br>¿Has llegado a ver doble como cuando haces un bizco? | |
| | | Cuando estás leyendo o vas a hacer tu tarea ¿Se empieza a ver borroso el cuaderno o el libro?<br>¿Esto ocurre inmediatamente o después de un tiempo?<br>¿Te duele la cabeza?<br>¿Tienes comezón en tus ojos?<br>¿Tienes problemas en la lectura por fatiga y sueño al leer, y no comprendes la lectura?<br>¿Mueves la cabeza o el libro para poder leer?<br>¿Te gusta hacer manualidades?<br>Después de leer un ratito ¿Tus ojos están rojos y parece que quieres llorar? | Si contesta de manera afirmativa todas las preguntas excepto la penúltima, su prediagnóstico es insuficiencia de acomodación o fatiga. |
| | | ¿Te cuesta trabajo ver el pizarrón después de haber leído más de 5 minutos tu libro, pero finalmente lo aclaras? | Si la respuesta es afirmativa para cualquiera de las preguntas el prediagnóstico es inflexibilidad de la acomodación. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | Si estás usando tu Tablet o celular y alguien te llama ¿Cuándo lo volteas a ver se nota un poco borroso y ya después de parpadear se ve bien?<br>¿Tienes dolores de cabeza?<br>¿Sientes cansados tus ojos?<br>Después de un rato de estar prestando atención ya sea a la televisión o al pizarrón o bien al celular o al libro ¿Te sientes cansado?<br>¿Te da comezón en tus ojos? | |
| | ¿Ha notado si el paciente durante la lectura o en actividades cercanas se acerca o se aleja del objeto para enfocar? | Mientras estás leyendo ¿Te acercas y te alejas de tu libro para verlo más claro?<br>¿Entiendes la lectura la primera vez que lees o tienes que leerla por lo menos dos veces? | Si contesta afirmativamente a estas preguntas hay que descartar exceso o insuficiencia de convergencia. |
| | Durante sus actividades ¿Ha notado si de repente cierra un ojo sin motivo aparente?<br>¿Lo hace cuando ve de lejos, de cerca o en ambas distancias? | ¿Por qué cierras un ojo?<br>¿Llegas a ver dobles las cosas o encimadas?<br>¿Has recibido un golpe en tu cabeza? (A la altura de la sien) | Sí sus respuestas son afirmativas el prediagnóstico es el inicio de una supresión. |
| | ¿Siente que al paciente le faltan | ¿Chocas con las cosas? | Si sus respuestas a las dos primeras |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | destrezas como esquivar objetos o llenar un vaso con agua?<br>¿Se le caen los objetos de las manos? | ¿Te caes sin motivo aparente cuando caminas o corres?<br>¿Eres bueno como portero?<br>¿Eres bueno para patear una pelota? | preguntas son afirmativas y a las dos últimas sus respuestas son negativas su prediagnóstico es estereopsis baja. |
| Alteraciones en la percepción visual | ¿El paciente logra diferenciar su derecha de su izquierda? | ¿Con qué mano escribes?<br>¿Con qué mano saludas a la Bandera?<br>¿Dónde está el techo? (arriba o abajo)<br>¿Dónde está el piso?<br>¿Quién está a tu izquierda?<br>¿Sabes seguir un laberinto dibujado? | Si contesta incorrectamente las preguntas o no puede seguir un laberinto el prediagnóstico es que hay alteraciones en el sistema visuoespacial |
| | El paciente ¿Juega rompecabezas?<br>¿Puede reconocer a la gente en una fotografía familiar?<br>¿Puede recordar que hizo ayer? | ¿Te gusta armar rompecabezas?<br>¿Te gusta jugar buscando diferencias?<br>¿Te acuerdas qué comiste ayer? (los tres alimentos básicos)<br>¿Cómo estaba vestida ayer tu mamá? | Si contesta negativamente las preguntas o no recuerda el pasado inmediato, el prediagnóstico es que hay alteraciones del sistema visomotor |
| | Al paciente ¿Hay que repetirle varias veces una instrucción, por ejemplo, trae el vaso que se encuentra en la mesa de la cocina, para que pueda cumplir el cometido? | ¿Puedes dibujar una canción o un cuento?<br>¿Puedes dibujar una casa y una taza?<br>Repite el gato se toma la gota | Si el paciente confunde las palabras o no es capaz de darle forma a lo que no es abstracto el prediagnóstico es alteración del sistema de análisis visual o de integración |

Aprendizajes esperados

Ya que el examen de visión permite conocer el estado visual del paciente y poner de manifiesto la posible existencia de anomalías, deseamos que nuestra práctica docente logre transmitir al estudiante que el interrogatorio en el paciente pediátrico es básico para crear confianza en el niño, así como el comprender su sentir, lo que le permitirá analizar las pruebas y procedimientos que debe realizar para obtener el diagnóstico y tratamiento que deben incluir los resultados de las múltiples pruebas realizadas. Es por ello que se diseñó una guía de interrogatorio con las posibles opciones para preguntar a un niño de acuerdo a su edad, así como los prediagnósticos posibles de acuerdo a sus respuestas.

Este modelo permite al alumno determinar las causas de la sintomatología o el punto motivo de consulta y las disfunciones que existen. Al momento de realizar una revisión de la historia clínica, el docente también podría hacer uso del interrogatorio para cuestionar al estudiante y que el mismo llegue a conclusiones importantes como el que la ausencia de sintomatología pueda ocultar la existencia de algún mecanismo de compensación sensorial que se instaura para evitar trastornos y molestias, permitiendo al paciente cubrir su demanda visual.

En el aspecto de diagnóstico se consideró la pregunta de si ¿Se consideraron los tres diagnósticos necesarios? El refractivo, el de visión binocular y el de visión perceptual, y con esto proponer un tratamiento integral, es decir incluir cosas como el uso de prismas, o terapia visual. Con este análisis el alumno notará la importancia de escoger un tratamiento adecuado, ya que de otra manera puede dar lugar a condiciones que compliquen la salud del paciente, tal y como confundir ambliopía refractiva con una ambliopía estrábica, o una alteración de la visión perceptual con un problema de visión binocular.

## Bibliografía

https://www.rahhal.com/blog/test-visuales-ninos/ **r**

http://www.imagenoptica.com.mx/pdf/revista35/examen.htm **n**

http://www.visualcentermadhu.com/blog/a-que-edad-es-conveniente-realizar-un-examen-visual-a-un-nino/ c

https://coopervision.com.mx/about-contacts/eye-exams-for-kids **l**

Vargas, J.J. (s.f.). optometría clínica & cuidado primario de la salud visual humana. Parte I. función visual. Clinikbox.

García A., Quero J., Evaluación Neurológica del Recién Nacido,2012. Ed. Díaz de Santos. Capítulo 19. España.

Goddard, S., Reflejos, Aprendizaje y Comportamiento. 2015. Ed. Vida kinesiología

# (Des)inversión en salud y prevalencia de Diabetes en México: aprendizaje facilitado por recursos digitales

María Antonieta Pérez-Nova[60], José Luis Pérez-Nova[61], Martha Susana Landeros Velázquez[62] y Gabriela Andreina Hernández Jiménez[63]
artnova.00@gmail.com

**Resumen**

Se presenta un análisis de la situación de la diabetes, en México y el mundo, mediante la comparación de los porcentajes de inversión en salud y otros estimadores socioeconómicos (1993-2018). En este trabajo los estudiantes que cursan Estadística aprenden a investigar utilizando recursos digitales abiertos y especializados, así mismo aprenden a utilizar, de manera eficiente, Excel. Los materiales deben ser pertinentes, relevantes, actuales y consistentes tanto en contenidos como en información. Las investigaciones que realizan los estudiantes siguen los contenidos académicos, incrementan la eficiencia terminal y estimulan el desarrollo de habilidades que favorecerán su inserción exitosa en el mercado laboral (Formación Dual).

**Palabras clave**

Bases de Datos Relacional, Recursos Educativos Abiertos, Diabetes, Educación y Formación Dual.

## Introducción

En este trabajo proponemos que, desde la investigación, es posible promover la formación de cuadros de profesionistas que desarrollen competencias para la vida y el trabajo. La formación Dual, así definida, es puesta en acción a través de diferentes actividades que desarrollan en clase los estudiantes que cursan Matemáticas I, Matemáticas II, Estadística o Biometría. Es importante mencionar que dichas asignaturas son consideradas de alto índice de reprobación en las carreras de Biología y de Químico Farmacéutico Biológica, en la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Para incrementar la eficiencia terminal en estas asignaturas, y con el objetivo de fomentar la creatividad mediante el análisis de problemas de interés y actualidad, pero que a su vez las actividades pedagógicas impacten en la formación dual de los estudiantes, en esta ocasión mostramos el análisis de la encuesta *Perfiles de los países para la diabetes* o simplemente *encuesta Perfiles*, (OMS, 2016).

[60] Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, UNAM
[61] Universidad Lumen Gentium
[62] Universidad Autónoma del Estado de Morelos
[63] Independiente y Migrante

El análisis comienza por seleccionar 10 países por región o continente. Una parte fue mediante muestreo aleatorio simple sin reemplazo y otra parte fue por intereses propios de los estudiantes. La información utilizada fue organizada de una base de datos relacional previamente reportada (Pérez-Nova, et al., 2018).

En el análisis de los *Perfiles* encontramos que muchos países reportaron avances en el control de la diabetes, pero la cobertura en salud no ha impactado en el control de esta enfermedad, así lo reflejan las estadísticas para el caso mexicano donde las mujeres son quienes más mueren a consecuencia de esta enfermedad o por enfermedades conexas a la misma.

Este ejercicio resulta de alto impacto para los estudiantes, pues además de aprender a trabajar bases de datos relacionales, muestreo y paquetes estadísticos como Excel (entre otros), toman conciencia del problema que vivimos en materia de salud y buscan maneras de mejorar sus hábitos comportamentales.

## Objetivos

Analizar la mortalidad de la diabetes en la OECD utilizando como fuente la encuesta *Perfiles* de la OMS del año 2016.

Comparar el gasto en salud en México y evaluar si estas variables pueden predecir el incremento de la diabetes en México

## Marco Teórico

La diabetes es una enfermedad crónica que aparece cuando la insulina (hormona que regula el azúcar en la sangre) no es producida por el páncreas o cuando el organismo no la utiliza eficientemente, lo que lleva a la hiperglucemia (aumento del azúcar en la sangre) y, con el tiempo, muchos órganos y sistemas se dañan de manera grave, especialmente los nervios y los vasos sanguíneos.

La Asociación Americana para la Diabetes establece que la tipo 2 es más común en afroamericanos, (Asociación americana para la diabetes, 2019), en tanto que la Organización Mundial de la Salud (OMS o WHO, por sus siglas en inglés) señala que la diabetes de tipo 2 es una paradoja de la tecnología en la historia de la humanidad pues representa más del 90% de los casos de diabetes; es una paradoja puesto que nunca se habían combinado dos elementos: alimentos de nueva generación con alta densidad calórica y, dos, baja demanda física en las actividades cotidianas (Feudtner, 2011).

La diabetes en México se asocia a una predisposición genética y a la hipertensión arterial, la obesidad, la dieta rica en azúcares simples y a la falta de ejercicio. Desafortunadamente México es uno de los países con mayor incidencia de diabetes mellitus en el mundo. En 1995 ocupaba el noveno lugar con mayor número de casos de diabetes, y se esperaba que para el año 2030 nuestro país ocupara el séptimo sitio con casi 12 millones de pacientes con diabetes tipo 2 (en el 2017 esta expectativa fue superada). De acuerdo con el

Instituto Mexicano del Seguro Social, IMSS, la diabetes es la primera causa de mortalidad, de años perdidos por muerte prematura, de años vividos con discapacidad y de años de vida saludable perdidos (Rodríguez-Abrego, et al., 2007).

En el 2016, la Encuesta Nacional de Salud de Medio Camino (ENSANUT MC 2016) del Instituto Nacional de Salud Pública (INSP) indicó que el 10.3% de las mujeres y 8.4% de los hombres (en promedio el 9.4% de los adultos entrevistados) habían sido diagnosticados con diabetes por un médico previamente a la aplicación de la encuesta, estos números representaron un ligero incremento en la prevalencia con respecto a la ENASANUT 2012 que fue de 9.2% y un incremento considerable en la prevalencia estimada con respecto a la ENSANUT 2006 quien reportó un 7.2% de la muestra representada.

El mismo estudio indicó que el mayor aumento de la prevalencia de diabetes, comparando la ENSANUT 2012 con la ENSANUT MC 2016, se observó entre los hombres de 60 a 69 años de edad y entre las mujeres con 60 ó más años de edad por lo que la mayoría de los diabéticos con diagnóstico médico previo tiene entre 60 y 79 años de edad (Shamah Levy, et al., 2016).

Health at a Glance 2017, informe sobre la prevalencia de diabetes tipo uno y dos en México, indica que nuestro país presenta la prevalencia más alta de diabetes en la OECD, 15%, comparada con el 5% que prevalece en la población adulta en Luxemburgo o Suecia o el 6.9% que tienen los países de la OECD. Los países que observan mayor frecuencia (después de México) son: Turquía con 12.8%, Estados Unidos con 10.8%, Brasil con 10.8% y Colombia con 10.4%. Debemos mencionar que la diabetes infantil tipo 1 en México es mucho menor al promedio del grupo (0.4% contra 1.2 regional, respectivamente), (OECD, 2017).

Todos estos datos contextualizan la importancia de nuestro trabajo: la relevancia de determinar la(s) causa(s) del incremento de la incidencia de la diabetes y de otros factores conexos; juzgamos que es necesario entender por qué las tasas de sobrepeso u obesidad en la población adulta mexicana aumentaron de 62% en 2000 a 71% en 2012.

La investigación muestra que existen factores explicativos multidimensionales del por qué las muertes por padecimientos cardiacos bajaron sólo 1% desde 1990 mientras que en muchos países de la OECD se redujeron en un 48%.

## Impacto pedagógico

Con esta actividad se busca desarrollar una investigación referenciada y actual en la que los estudiantes muestren conocimientos sobre el manejo de bases de datos, organización de la información, análisis, uso de paquetería estadística y búsqueda de información en diversos recursos digitales académicamente pertinentes. Pretendemos fomentar el desarrollo de habilidades para que los estudiantes, desde la educación superior, tengan un mejor posicionamiento al ingresar al mercado laboral.

Buscamos ser facilitadores para propiciar la apropiación de las Matemáticas y de la Estadística y así abatir la deserción escolar.

Nuestra investigación toma como base un reporte de la Organización Mundial de la Salud, “Diabetes: perfiles de los países 2016”. La publicación describe dos ejes de intervención por cada país del orbe: prevención y control de la diabetes para la población de 30 años o más divididos en: hombres, mujeres y en subgrupos de 30-69 años y más de 70 años. Aunque el reporte de los perfiles incluye prevalencia; disponibilidad de planes nacionales de lucha contra la diabetes; vigilancia; políticas de prevención y tratamiento; medicamentos disponibles; técnicas y procedimientos básicos; tendencias y factores de riesgo, nos enfocamos en la mortalidad por afectar directamente y de manera negativa en una población económicamente activa y de cada vez mayor frecuencia.

## Desarrollo

Utilizando Recursos Educativos Abiertos (REA), como la página de Fundación Española del Corazón, los estudiantes pueden acceder a información de actualidad relacionada con la diabetes, pueden entender por qué la diabetes es un factor de riesgo en eventos cardiovasculares o cerebrovasculares, y pueden utilizar herramientas que además de calcular su riesgo cardiovascular les proporciona sencillas recomendaciones para mejorar sus estilos de vida.

Los alumnos que cursan Estadística o Matemáticas I y II, además de explorar la fundación citada, revisan la página de la Asociación Americana para la Diabetes, realizan otras búsquedas en diversos recursos electrónicos, y comparan la información publicada en todos los medios.

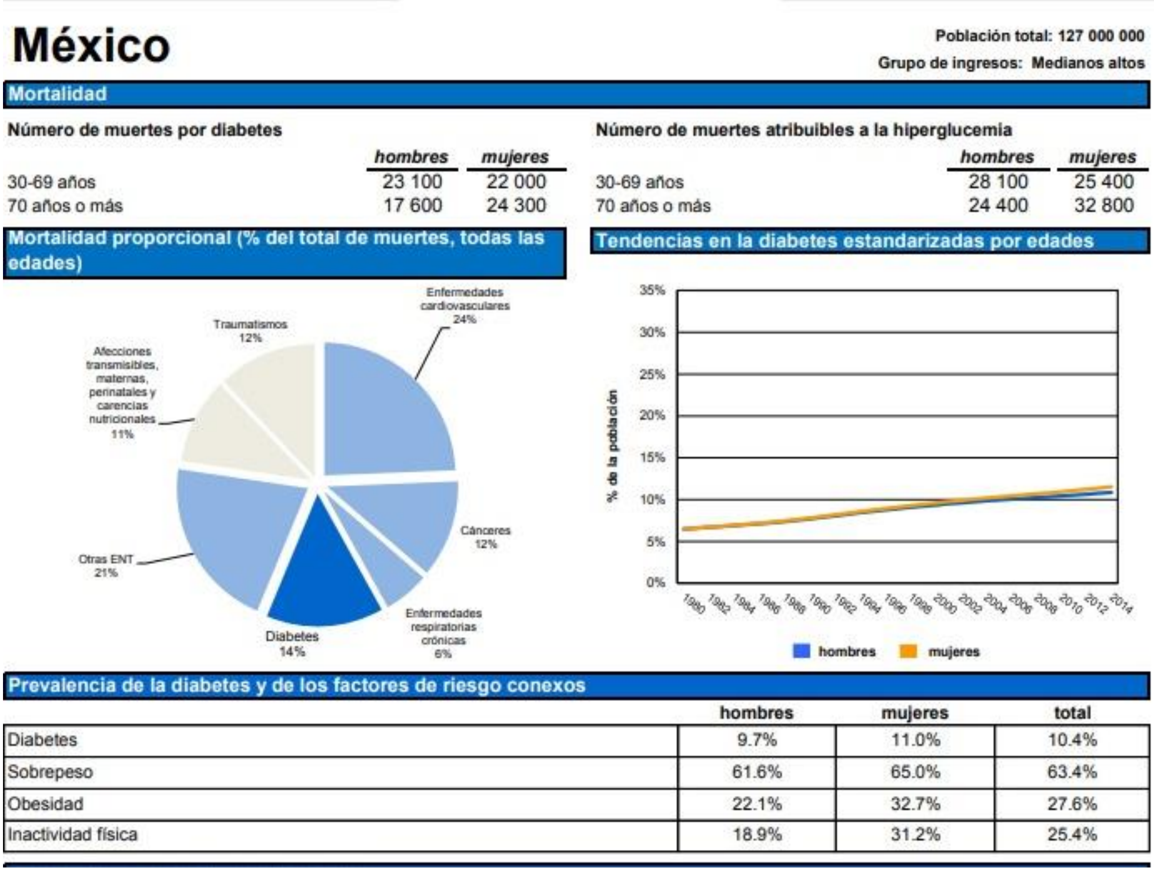
Posterior a este primer acercamiento, exploran la página de la Organización Mundial de la Salud (OMS) y la información que les proporciona, para finalmente revisar las bases de datos. En esta sección los estudiantes rastrean cualquier área de interés y se les da el tiempo necesario hasta que se percatan de que la información es tan basta que habitualmente se pierden en el mundo de información, es por eso que se les da una metodología de acuerdo al siguiente planteamiento.

### Metodología

Considerando la base Perfiles de la diabetes 2016 de la OMS, se enumeran los países y se organizan en 5 regiones (África, América Latina, Asia, Europa y Oriente Medio). Posteriormente se seleccionan 10 de ellos utilizando una tabla de números aleatorios, no obstante, en ocasiones los estudiantes deciden seleccionar un país en particular.

La información que la OMS reporta en tablas (figura 1) fue capturada y organizada de una base de datos relacional (figura 2) que previamente reportamos en otra investigación (Pérez-Nova, et al., 2018). La base de datos captura todos los elementos que reporta la OMS para finalmente generar los índices de mortalidad por país y proponer índices de mortalidad por región.

Los índices de mortalidad por diabetes (Db) o hiperglucemia (hg) se construyeron a partir de los datos seleccionados en nuestra muestra. El cálculo consideró el cociente de los totales de muertes por diabetes en los países seleccionados entre los totales de la población de los países de la misma región. Para el caso de América Latina (AL) reportamos, bajo el mismo procedimiento, un índice de mortalidad por hiperglucemia y esto se realizó porque se quería explorar un poco más lo que pasa en México en un contexto latinoamericano.


México

Población total: 127 000 000
Grupo de ingresos: Medianos altos

Mortalidad

Número de muertes por diabetes

| | hombres | mujeres |
|---|---|---|
| 30-69 años | 23 100 | 22 000 |
| 70 años o más | 17 600 | 24 300 |

Número de muertes atribuibles a la hiperglucemia

| | hombres | mujeres |
|---|---|---|
| 30-69 años | 28 100 | 25 400 |
| 70 años o más | 24 400 | 32 800 |



Prevalencia de la diabetes y de los factores de riesgo conexos

| | hombres | mujeres | total |
|---|---|---|---|
| Diabetes | 9.7% | 11.0% | 10.4% |
| Sobrepeso | 61.6% | 65.0% | 63.4% |
| Obesidad | 22.1% | 32.7% | 27.6% |
| Inactividad física | 18.9% | 31.2% | 25.4% |

Figura 1. Ejemplo de reporte de la OMS 2016.

**Base de datos Diabetes y prevalencia por país** https://www.who.int/diabetes/country-profiles/es/

| Tablanombre | Descripción tabla | Núm | ClaveAtributo | Descripción del Atributo | Tatributo | Tipo variable | Tipo dato |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | **pais** | País | simple | categórica | cadena |
| paisDb | características | 2 | **pobtot** | Población total | simple | numérica | entero |
| | macroeconómicas | 3 | **tipoIngreso** | Ingreso de la población por país | simple | categórico | cadena |
| muerteDbHg | Mortalidad total por | 4 | **muerteDbtot** | Mortalidad Diabetes por país | simple | numérico | entero |
| | Db e Hg | 5 | **muertehgtot** | Mortalidad hiperglucemia por país | simple | numérico | entero |
| | mortalidad Db por edad y sexo | 6 | **muerteDb30-69 h** | mortalidad por Db 30-69 años hombres | simple | numérico | entero |
| | | 7 | **muerteDb30-69 m** | mortalidad por Db 30-69 años mujeres | simple | numérico | entero |
| | | 8 | **muerteDb70+ h** | mortalidad por Db 70+ años hombres | simple | numérico | entero |
| | | 9 | **muerteDb70+ m** | mortalidad por Db 70+ años mujeres | simple | numérico | entero |
| | mortalidad Hg por edad y sexo | 10 | **muerteHg30-69 h** | mortalidad por Hg 30-69 años hombres | simple | numérico | entero |
| | | 11 | **muerteHg30-69 m** | mortalidad por Hg 30-69 años mujeres | simple | numérico | entero |
| | | 12 | **muerteHg70+ h** | mortalidad por Db 70+ años hombres | simple | numérico | entero |
| | | 13 | **muerteHg70+ m** | mortalidad por Hg 70+ años mujeres | simple | numérico | entero |
| | Mortalidad proporcional: | 14 | **mortDb** | Mortalidad proporcional Diabetes | simple | numérico [%] | float |
| | | 15 | **mortECV** | Mortalidad proporcional ECV | simple | numérico [%] | float |
| | | 16 | **mortERC** | Mortalidad proporcional ERC | simple | numérico [%] | float |
| paisMortalidad | % del total de muertes, todas las edades | 17 | **mortOtras ENT** | Mortalidad proporcional otras ENT | simple | numérico [%] | float |
| | | 18 | **mortafec** | Mortalidad proporcional por Afecciones | simple | numérico [%] | float |
| | | 19 | **morttraumat** | Mortalidad proporcional por traumatismo | simple | numérico [%] | float |

Figura 2. Ejemplo de la BD relacional desarrollada.

## Resultados

A continuación, mostramos los porcentajes de mortalidad de diabetes con respecto al total de la población por país y por región. Considere que no calculamos la incidencia de diabetes (Db) por país sino su mortalidad.

En esta sección los estudiantes aprenden a analizar la información y a reportarla, así mismo, aprenden a manejar grandes volúmenes de información y establecen acciones estratégicas que les permitirá hacer propuestas de intervención social o, simplemente analizan el impacto de sus indagaciones.

Lo que más nos interesa en esta sección es que realicen bien sus ponderaciones, que sean sistemáticos en los reportes, y que sean muy claros tanto en el desarrollo de las tablas como en el reporte de gráficas.

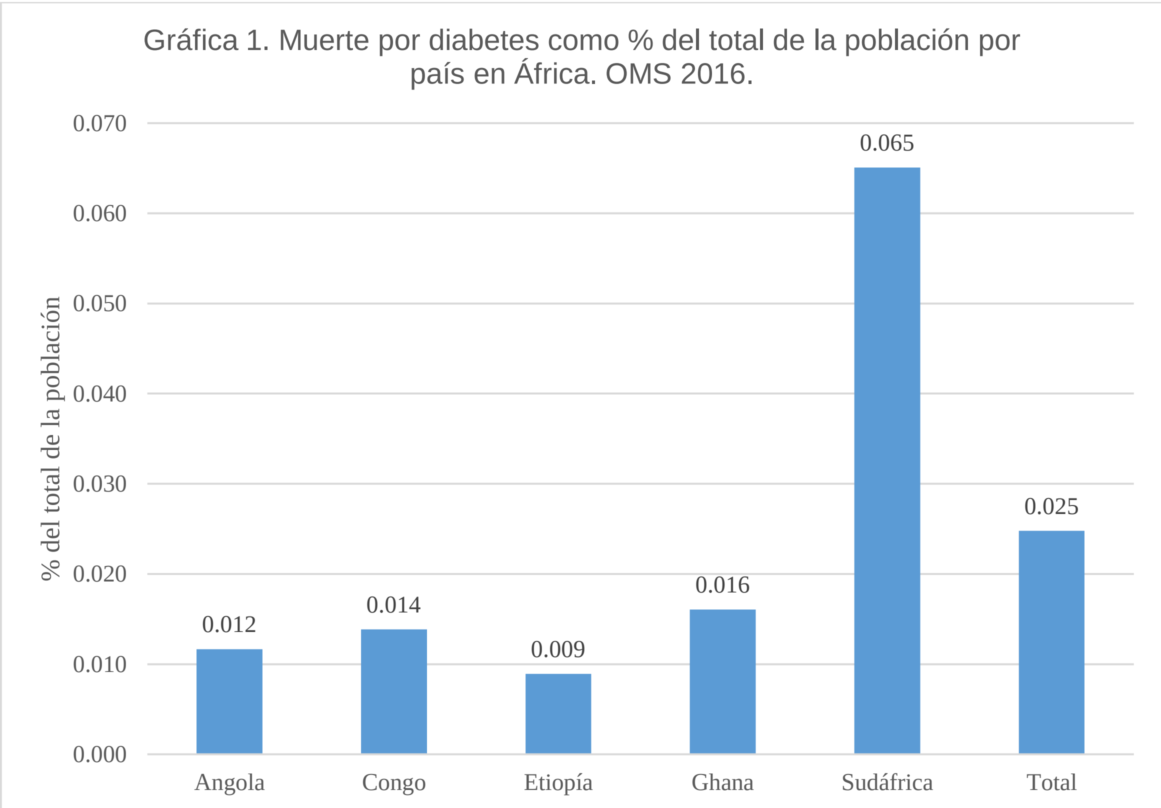
### África:

Tendencia de mortalidad por diabetes en la región para los países seleccionados.

De los países de la muestra de dicha región, se calculó una media de 10,454 muertes por diabetes y una desviación estándar de 12,788 personas. 2.5 personas de cada diez mil en promedio mueren por diabetes en la región. Siendo Sudáfrica el país más afectado por este problema ya que mueren 65 personas de cada diez mil, de acuerdo a nuestro muestreo (Tabla 1 y Gráfica 1).

Tabla 1. Índice de muertes por diabetes (DB) en países seleccionados de África

| País | Población total | Peso de la población (%) | Muerte total por Diabetes (Db). | % de muerte por Db por país. |
|---|---|---|---|---|
| Angola | 25,022,000 | 12 | 2,920 | 0.012 |
| Congo | 4,620,000 | 2 | 640 | 0.014 |
| Etiopía | 99,391,000 | 47 | 8,850 | 0.009 |
| Ghana | 27,410,000 | 13 | 4,400 | 0.016 |
| Sudáfrica | 54,490,000 | 26 | 35,460 | 0.065 |
| **Total** | **210,933,000** | **100** | **52,270** | **0.025** |
| **prom** | **42,186,600** | **20** | **10,454** | **0.023** |
| **desvest** | **32,704,550** | **16** | **12,787.5** | **0.021** |




América Latina:

La segunda región analizada fue América Latina (AL), para ésta se obtuvo una muerte media de 18930 personas y una desviación estándar de 30719 muertes. Este resultado es impactante porque los alumnos pueden calcular que el país con más muertes ocasionadas por la diabetes, comprada a su población, es México.

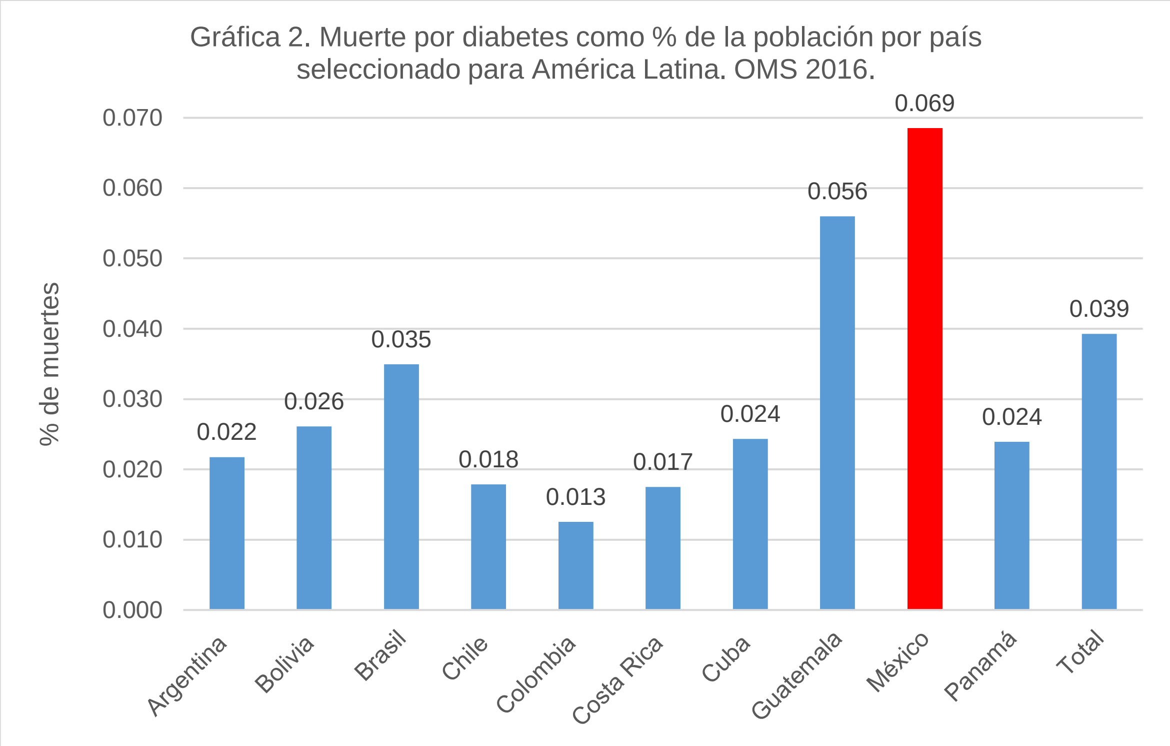
Es importante resaltar que el estudiante calcula el cociente de la mortalidad de la diabetes con respecto al total de la población del país y se encontró que en México muere por diabetes el 0.069% de su población seguido de Guatemala con 0.056%. El promedio de muertes en la región es de 0.039% lo que hace alarmante los datos que presentan México y Guatemala (tabla 2 y gráfica 2).

Tabla 2. Muertes por Diabetes en países seleccionados de América Latina

| País | Población total | Peso de la población (%) | Muerte total por Diabetes (Db). | % de muerte por Db por país. |
|---|---|---|---|---|
| Argentina | 43417000 | 9.01 | 9440 | 0.022 |
| Bolivia | 10725000 | 2.23 | 2800 | 0.026 |
| Brasil | 208000000 | 43.17 | 72700 | 0.035 |
| Chile | 17948000 | 3.73 | 3210 | 0.018 |
| Colombia | 48229000 | 10.01 | 6050 | 0.013 |
| Costa Rica | 4804000 | 1.00 | 840 | 0.017 |
| Cuba | 11390000 | 2.36 | 2770 | 0.024 |
| Guatemala | 6343000 | 1.32 | 3550 | 0.056 |
| México | 127000000 | 26.36 | 87000 | 0.069 |
| Panamá | 3929000 | 0.82 | 940 | 0.024 |
| **Total** | **481785000** | **100** | **189300** | **0.039** |
| **media** | **48178500** | **10** | **18930** | **0.030** |
| **desvstd** | **64060932.9** | **13.30** | **30719** | **0.017** |

La hiperglucemia (hg) es un factor conexo que incrementa la mortalidad por país. En esta sección se calculó el índice de mortalidad por hiperglucemia (hg) y el total de diabetes e hiperglucemia para lo cual se sumaron los casos de muertes por estos dos factores y se determinó el porcentaje que representaban de la población total (gráfica 3 y tabla 3).

Un dato adicional que revela la gravedad de este problema es la determinación de muertes como % de muertes totales en la región (gráfica 3b).



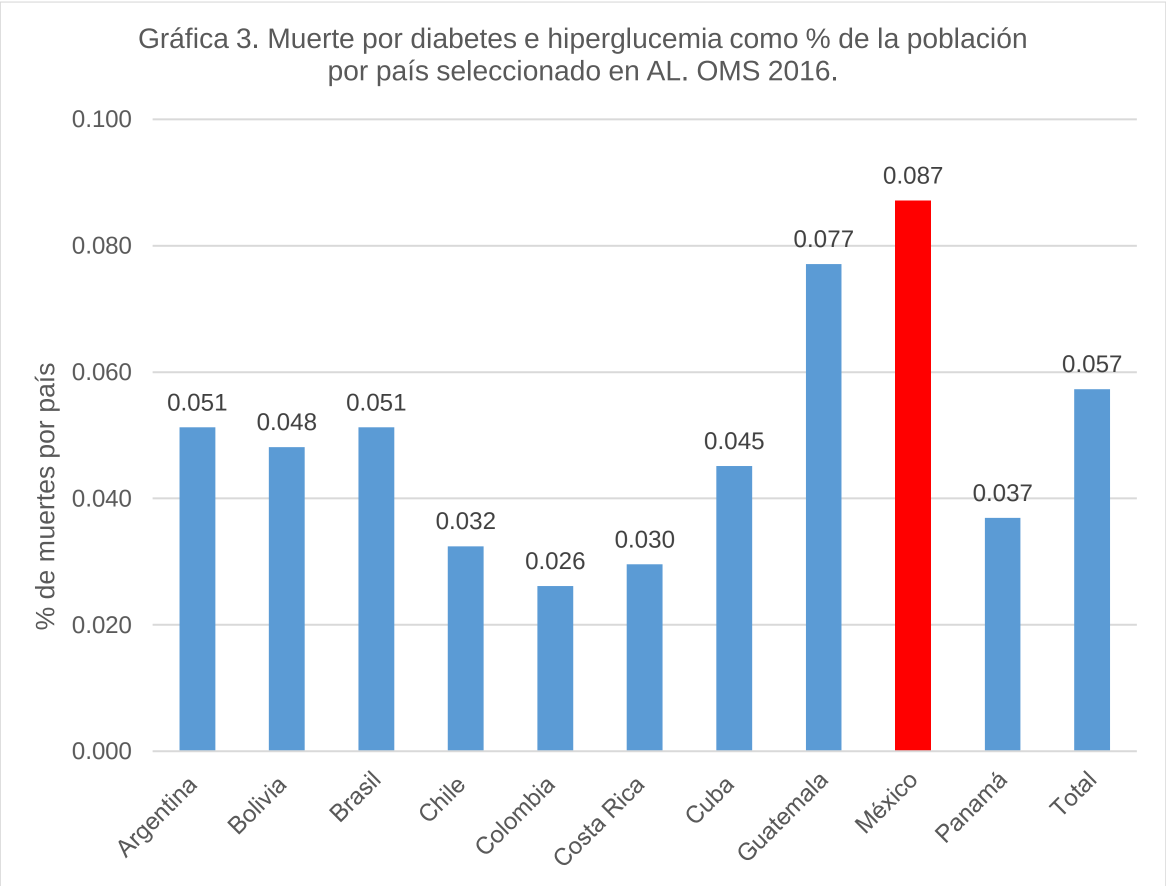
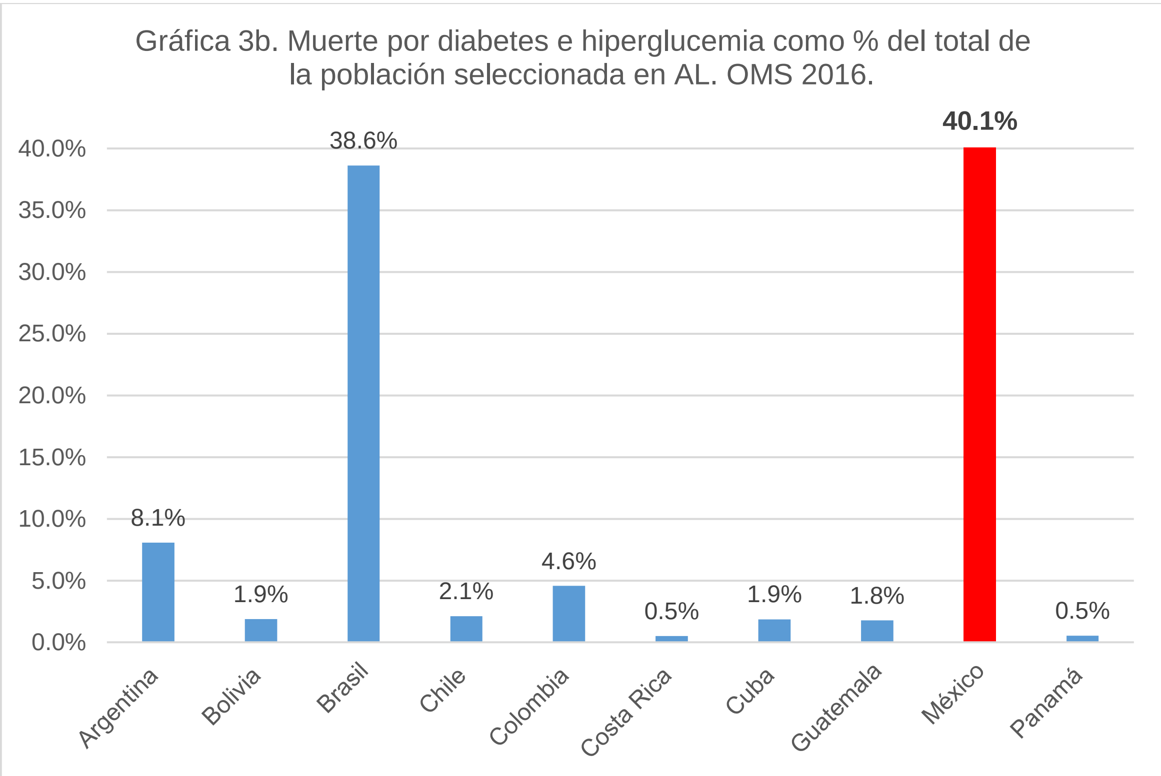




Tabla 3. Índice de muertes por Diabetes e Hiperglucemia en países de AL. OMS 2016

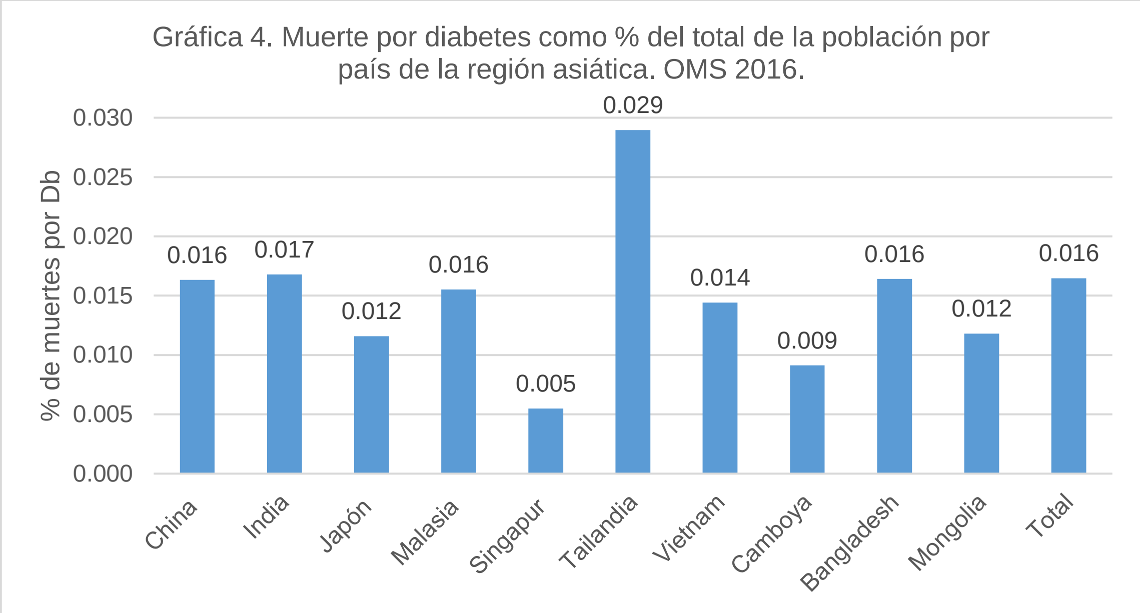
| País | Población total | Muerte por Db+hg | % de muerte por Db+hg | Muertes por Db+hg % de la región |
|---|---|---|---|---|
| Argentina | 43417000 | 22259.01 | 0.051 | 8.1 |
| Bolivia | 10725000 | 5162.23 | 0.048 | 1.9 |
| Brasil | 208000000 | 106643.17 | 0.051 | 38.6 |
| Chile | 17948000 | 5823.73 | 0.032 | 2.1 |
| Colombia | 48229000 | 12600.01 | 0.026 | 4.6 |
| Costa Rica | 4804000 | 1421.00 | 0.030 | 0.5 |
| Cuba | 11390000 | 5142.36 | 0.045 | 1.9 |
| Guatemala | 6343000 | 4891.32 | 0.077 | 1.8 |
| México | 127000000 | 110726.36 | 0.087 | 40.1 |
| Panamá | 3929000 | 1450.82 | 0.037 | 0.5 |
| **Total** | **481785000** | **276120.00** | **0.057** | **100** |
| **media** | **48178500** | **27612.00** | **0.05** | **10** |
| **desvstd** | **64060932.9** | **40961.14** | **0.02** | **14.84** |

Nota: las gráficas 3 y 3b toman valores de la tabla 3.



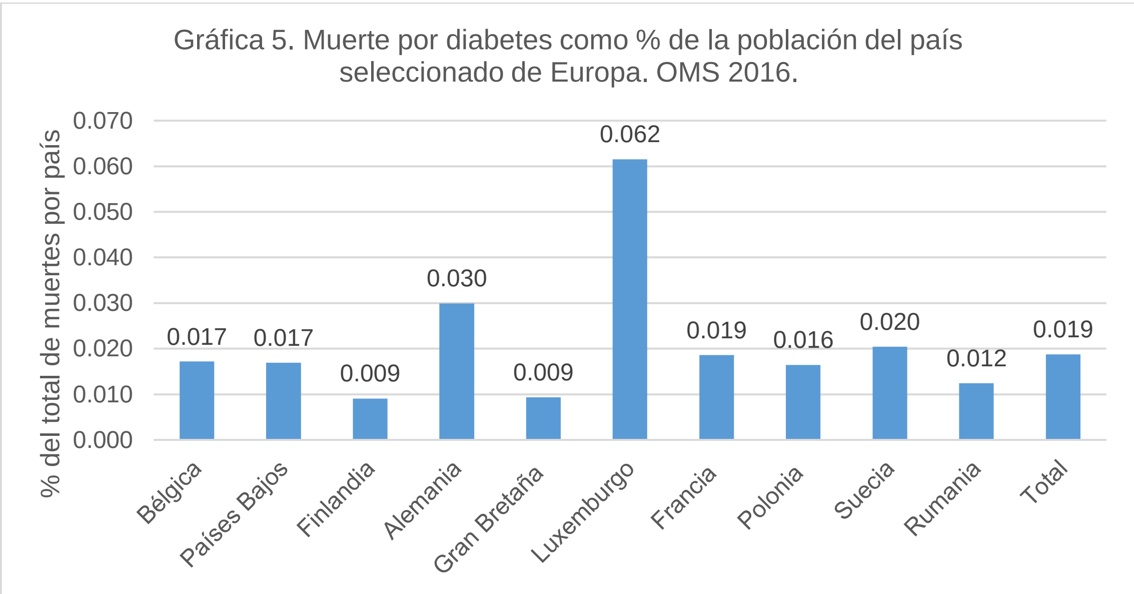

Asia:

En cuanto al continente asiático, encontramos índices bajos de mortalidad tanto por diabetes como por hiperglucemia, siendo aún más bajos que el promedio obtenido en América Latina, gráfica 4.



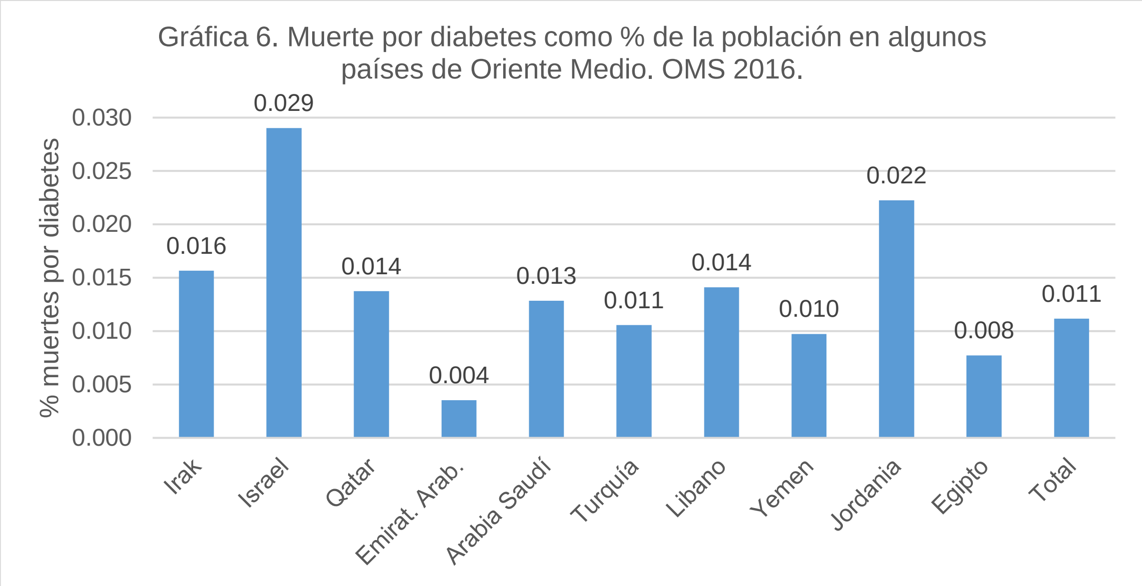

Europa:

En Europa seguimos encontrando índices bajos de mortalidad tanto por diabetes como por hiperglucemia siendo aún más bajos que el promedio obtenido en AL. Esto lo podemos observar en la gráfica 5.




Oriente Medio:

En Medio Oriente encontramos índices de mortalidad por diabetes tan bajos como los observados en el caso europeo, gráfica 6.




## Aprendizajes esperados

Las actividades que desarrollan los estudiantes se encuentran específicamente enfocadas a fortalecer la investigación desde el aula de clases, pero al mismo tiempo impactamos en los métodos de enseñanza al presentar un problema social de actualidad.

En el proceso de enseñanza-aprendizaje que aquí presentamos, el desarrollo de habilidades colaborativas son determinantes para reportar una investigación más lograda.

Es importante mencionar que esta investigación tiene adecuaciones específicas a la asignatura, por ejemplo, los estudiantes de Estadística obtienen parámetros que describen mejor las curvas o las tendencias, en tanto que los estudiantes de Matemáticas modelan las funciones y calculan la derivada de la función o el área de las curvas obtenidas. No obstante todos los estudiantes incorporan elementos tecnológicos necesarios para los trabajos que nuestro país actualmente requiere, por ejemplo aprenden a utilizar mejor los recursos estadísticos que tiene Excel, pero también pueden utilizar otro tipo de paquetes estadísticos como SPSS, siendo este un paquete muy utilizado en diversos centros de trabajo y de investigación.

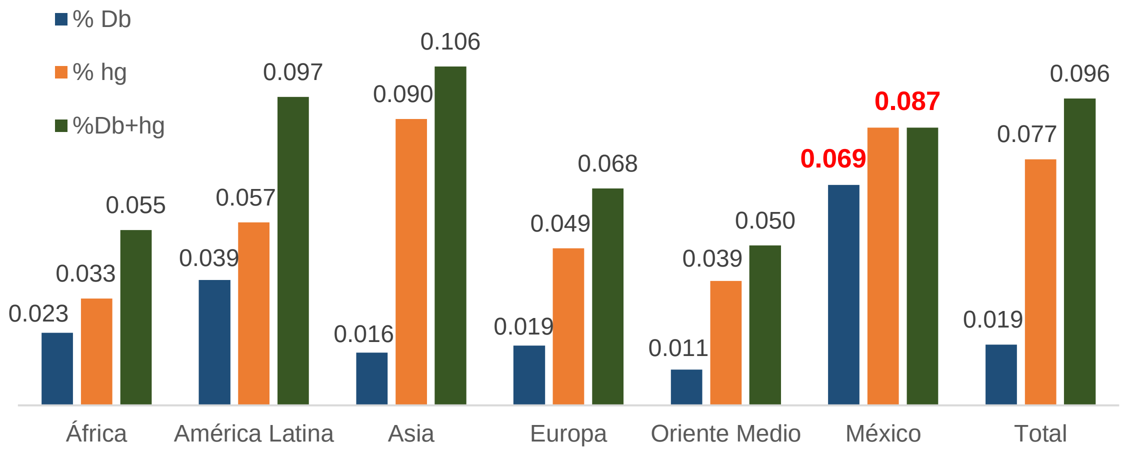
En estas actividades los alumnos calculan índices de mortalidad en la muestra y realizan otras proyecciones como las que presentamos a continuación.

<u>México en un contexto regional:</u>

Una vez obtenidos los índices de mortalidad por diabetes para cada uno de los países seleccionados y agrupados por regiones es posible seguir analizando este problema por lo que se promueve, a través del método socrático, que el alumno intente comparar el caso mexicano en un contexto global.

La gráfica 7 muestra el comportamiento de los decesos por diabetes y/o hiperglucemia en México y su comparativo con AL y el mundo. El resultado es muy inquietante y nos alarma saber que la población mexicana por sí sola tiene el peor panorama mundial en este rubro pero también esta propuesta es muy creativa pues a través de esta podemos comparar algún país con respecto a una región particular o respecto al total de los países estudiados en la muestra.

Gráfica 7. Muertes debidas a Diabetes e Hiperglucemia. % del total de la población por región. OMS 2016.



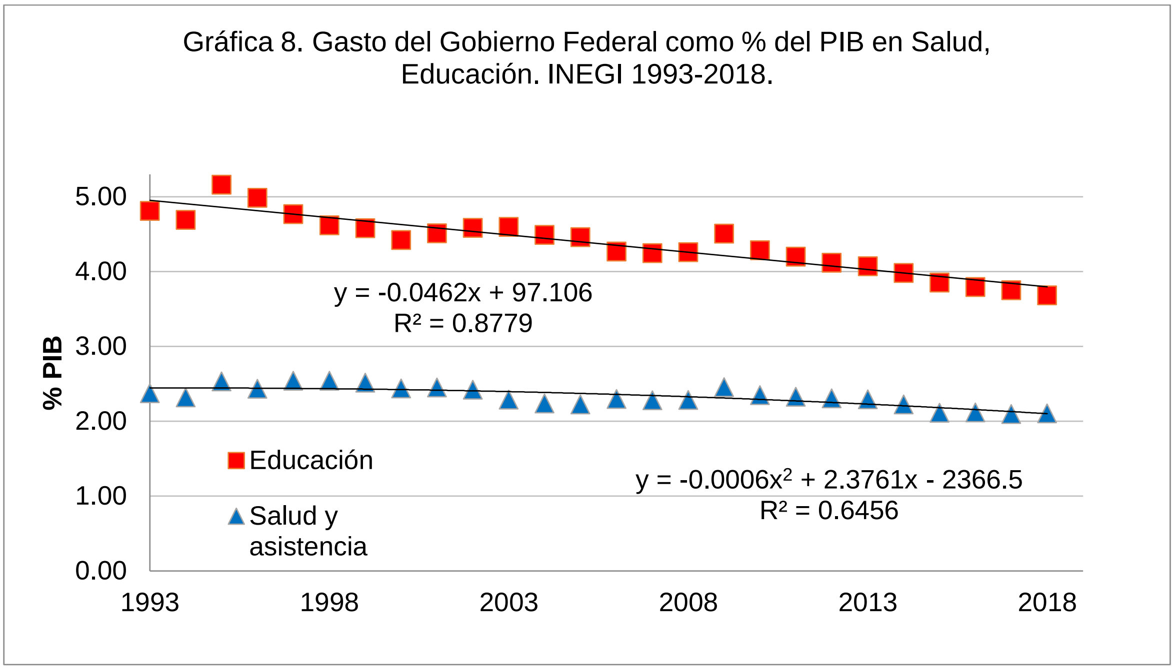

Debemos comentar que las diferencias entre regiones y entre países son estadísticamente significativas considerando un nivel de significancia de $\alpha = 0.05$. No mostramos el análisis porque no era el objetivo de este trabajo.

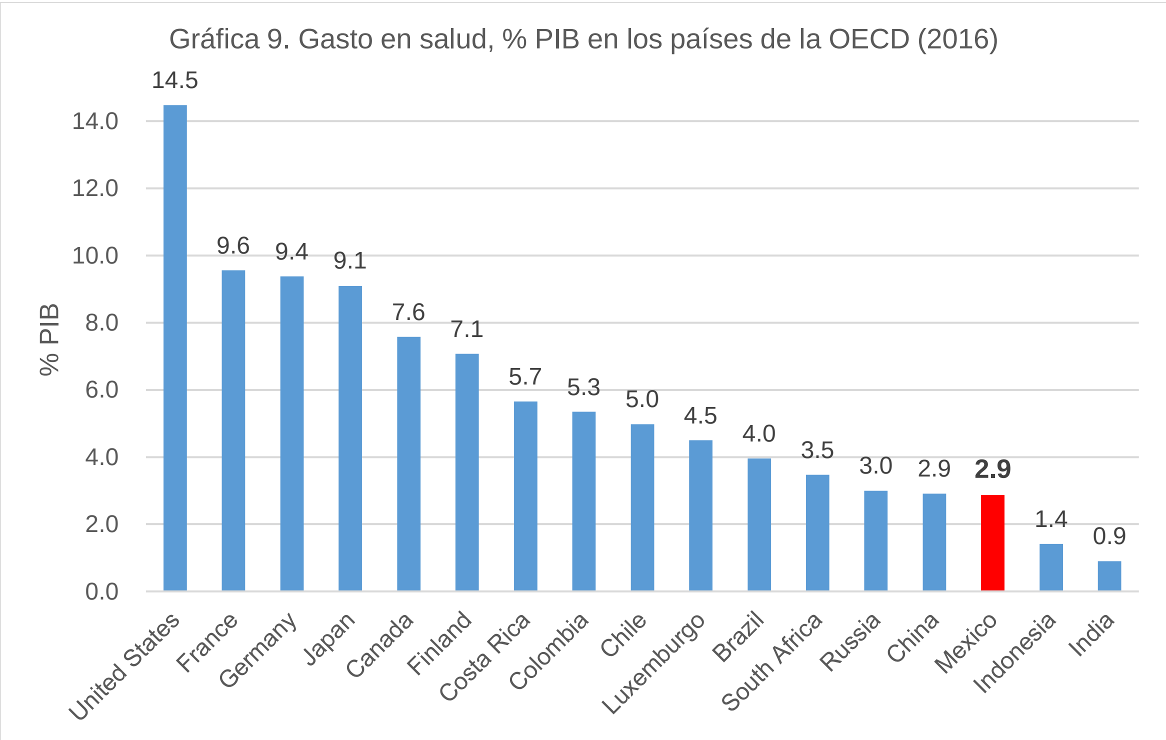
Otras evidencias:

*Desinversión o decremento en el gasto en Salud.* Los estudiantes pueden realizar más exploraciones comparando bases de datos de otras fuentes, por ejemplo, es posible consultar las cifras del INEGI y en ella se muestran decrementos en la inversión en Salud. Los estudiantes encuentran que las últimas 5 administraciones previas a este gobierno no consideraron incrementar la inversión en este rubro.

Es posible que los estudiantes encuentres resultados alarmantes, por ejemplo, en el periodo de 1993 a 2018 las administraciones federales presentan un fenómeno que hemos llamado *desinversión en Salud y en Educación*.

La gráfica 8 muestra el gasto en Salud y en Educación en el tiempo y la gráfica 9 posiciona el gasto en Salud de México en los países integrantes de la OECD. Se observa que México es de los países que menos gastan en Salud, aunque puede verse este mismo hecho en Educación, (INEGI, 2018; OECD 2016 y 2019).




Recurso: OECD (2019), "Health expenditure and financing: Health expenditure indicators", *OECD Health Statistics* (database), https://doi.org/10.1787/data-00349-en (accessed on 27 agosto 2019).

## Conclusiones

Este trabajo presente diversas aportaciones que deben analizarse en dos rubros generales: 1) la investigación en salud y epidemiología y 2) aportaciones a la pedagogía matemática estos dos campos los describiremos de manera sincrónica.

Con temas de actualidad los estudiantes trabajan bases de datos obtenidas de recursos electrónicos abiertos que apoyan su formación académica, fortalecen el estudio de la Estadística y los lleva a descubrir que la Estadística Descriptiva es en sí misma una poderosa herramienta de investigación que permite describir el entorno social y económico en el que vivimos. Matemáticamente los estudiantes son capaces de desarrollar modelos que describen tendencias de los fenómenos descritos con anterioridad lo que incrementa el nivel de impacto en su aprendizaje.

Esta investigación puede ser replicada en su totalidad por profesores que imparten alguna Estadística, Matemáticas o Metodología de la investigación y en ella podrán ver que el *gasto* del Gobierno debe ser conceptualizado como *inversión* el cual debe ser bien administrado y fortalecido para promover el desarrollo. En este trabajo pudimos corroborar que las cifras en inversión en salud en México son de las más bajas dentro de los integrantes de la OECD (gráfica 9), asimismo y de acuerdo con estadísticas del INEGI, el gasto en este rubro ha ido a la baja, lo cual se observa desde el gobierno salinista en 1993 hasta el peñista en noviembre de 2018 (gráfica 8).

La disminución en el gasto corriente en Salud y Educación de 1993 a 2018 nos lleva a proponer el término de ***desinversión***. Consideramos que esta falta de inversión ha hecho que México se posicione como uno de los países que menos gasta en Salud y Educación dentro de la OECD (2016) y que ha generado que México sea el país que está siendo más afectado por problemas de obesidad, diabetes e hipertensión.

La desinversión en salud es parte de un problema multidimensional pero consideramos que el crecimiento exponencial de la diabetes (figura 1) y otras enfermedades conexas, enfermedades relacionadas con los hábitos comportamentales y con el procesamiento tecnológico nunca antes visto en los alimentos, es por falta de intervención social y ha llevado a que la prevalencia de diabetes en México sea del 15.8% en la población de 20 a 79 años, siendo las mujeres de más de 60 años las más afectadas.

Dentro de las actividades de análisis de los resultados, los estudiantes generan mesas redondas al final del semestre y comparten sus observaciones e inquietudes, dentro de ellas aportaron que México casi duplica la mortalidad por diabetes en AL, gráfica 7, en tanto que la relación de muertes debidas a hiperglucemia en México también es mayor en esta región es por ello que la calidad de vida de los mexicanos se ha visto deteriorada.

De este trabajo tenemos una gran experiencia pedagógica que podemos migrar de lo académico a la intervención social y comunitaria. En clase se discute la importancia de desarrollar programas que sean diferentes a los que típicamente se presentan en los centros de salud.

La investigación que reportamos también es una gran experiencia pedagógica porque los estudiantes se percatan no sólo de la problemática que en materia de salud vivimos si no, además, es una forma en que aprenden a trabajar con grandes volúmenes de información y de manera colaborativa. En clase es común que los estudiantes repliquen ejemplos como los que presentamos para luego realizar sus propias investigaciones; de esta forma promovemos tanto el aprendizaje significativo como el aprendizaje contextualizado que los capacita para el trabajo y a la vez les permite desarrollarse como analistas de información.

Finalmente, la formación dual para el trabajo (y la investigación) se actualiza en el uso de recursos electrónicos académicamente pertinentes. Nuestra propuesta fomenta que los estudiantes no sólo investiguen, sino que, además, promueve la obtención de información, su organización, generación de bases de datos consistentes pero sobre todo genera lazos sociales al promover sujetos solidarios, competentes tanto en el uso de tecnologías como en el manejo adecuado del lenguaje.

## Referencias


- Arredondo A., and De Icaza E. (2011). The cost of diabetes in Latin America: evidence from Mexico. Value Health. 2011 Jul-Aug; 14 (5 Suppl 1): S85-8. Available at: https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/21839907.
- Asociación Americana para la Diabetes. Página electrónica obtenida en agosto de 2019 de: http://archives.diabetes.org/es/informacion-basica-de-la-diabetes/diabetes-tipo-2/
- Feudtner, C. (2011). Diabetes: la paradoja de la tecnología moderna. *Boletín de la Organización Mundial de la Salud*; 89:90–91. Recuperado en agosto de 2019 de: https://www.who.int/bulletin/volumes/89/2/11-040211/es/.
- Gutiérrez JP, Rivera-Dommarco J, Shamah-Levy T, Villalpando-Hernández S, Franco A, Cuevas-Nasu L, Romero-Martínez M, Hernández-Ávila M. *Encuesta Nacional de Salud y Nutrición 2012. Resultados Nacionales.* Cuernavaca, México: Instituto Nacional de Salud Pública (MX), 2012. Recuperado en Agosto de 2019 de https://ensanut.insp.mx/informes/ENSANUT2012ResultadosNacionales.pdf
- INEGI Conteo de Población y Vivienda 1995. Recuperado en mayo de 2019 de: https://www.inegi.org.mx/programas/ccpv/1995/
- INEGI Encuesta Intercensal 2015. Recuperado en mayo de 2019 de: https://www.inegi.org.mx/programas/intercensal/2015
- Mathers C. D, Loncar D. (2016). Projections of global mortality and burden of disease from 2002 to 2030. PLoS Med, 2006, 3(11):e442.
- OECD (2019), "Health expenditure and financing: Health expenditure indicators", *OECD Health Statistics* (database), Available at: https://doi.org/10.1787/data-00349-en (accessed on agosto 2019).
- OECD (2017), *Health at a Glance 2017: OECD Indicators*, OECD Publishing, Paris, disponible en: https://doi.org/10.1787/health_glance-2017-en.
- OECD (2016), "Education Database: Educational expenditure by educational level (Edition 2016)", *OECD Education Statistics* (database), https://doi.org/10.1787/f436af3f-en (accessed on 27 August 2019).
- OECD (2016), *OECD Reviews of Health Systems: Mexico 2016*, OECD Reviews of Health Systems, OECD Publishing, Paris, https://doi.org/10.1787/9789264230491-en.
- OECD (2016). El sistema mexicano de salud ha registrado avances importantes durante la última década, pero aún enfrenta desafíos considerables. Boletín informativo. Recuperado en agosto de 2019 de: https://www.oecd.org/centrodemexico/medios/el-sistema-mexicano-de-salud-

ha-registrado-avances-importantes-durante-la-ultima-ducada-pero-aun-enfrenta-desafios-considerables.htm.

- Olaiz-Fernández G, Rivera-Dommarco J, Shamah-Levy T, Rojas R, Villalpando-Hernández S, Hernández-Avila M, Sepúlveda-Amor J. *Encuesta Nacional de Salud y Nutrición 2006*. Cuernavaca, México: Instituto Nacional de Salud Pública, 2006. Recuperado en Agosto de 2019 de: https://ensanut.insp.mx/informes/ensanut2006.pdf.
- OMS, (2016). Perfiles de la diabetes 2016, México. Recuperado en Agosto de 2019 de: https://www.who.int/diabetes/country-profiles/mex_es.pdf?ua=1.
- OMS, Ginebra (2016), Informe mundial sobre la diabetes. WHO/NMH/NVI/16.3. Recuperado en Agosto de 2018 de: www.who.int/diabetes/global-report.
- ONU, Pacto Internacional de Derechos Económicos, Sociales y Culturales, A/RES/2200 A (XXI), de 16 de diciembre de 1966): [Fecha de consulta: 22 de junio de 2017] Disponible en: http://www.cinu.org.mx/onu/documentos/pidesc.htm.
- Pérez Nova María Antonieta, Pérez Nova Edgar Ricardo, Hernández Jiménez Gabriela Andreina. (2019). Sistemas gestores y diseño de bases de datos como apoyo pedagógico para la Estadística. *Didáctica de las Ciencias*, número 2, páginas 75-86, mayo de 2019. Revista de la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional. Recuperado en enero de 2020 de:
- https://www.esfm.ipn.mx/assets/files/esfm/docs/jornadas/revista-Jornadas-II.pdf
- Rodríguez-Abrego, G., Escobed. J., Zurita, B. y Ramírez, T. (2007). Muerte prematura y discapacidad en los derechohabientes del Instituto Mexicano del Seguro Social. *Salud Pública de México*, Vol. 49, Núm. 2. Recuperado en agosto de 2019 de: http://saludpublica.mx/index.php/spm/rt/printerFriendly/6747/8446.
- Shamah Levy, T., Cuevas, L., Rivera, J. y Hernández, D. *Encuesta Nacional de Salud y Nutrición de Medio Camino 2016.* Cuernavaca, México: Instituto Nacional de Salud Pública, 2006. Recuperado en Agosto de 2019 de http://transparencia.insp.mx/2017/auditorias-insp/12701_Resultados_Encuesta_ENSANUT_MC2016.pdf.
- WHO, Ginebra (1999), Definition, diagnosis and classification of diabetes mellitus and its complications. Part 1: Diagnosis and classification of diabetes mellitus. Report Number: WHO/NCD/NCS/99.2.

# Estados base de quarks y su relación de ortonormalidad

José M. Rivera Rebolledo[64], Albino Hernández Galeana[65],
jrivera@esfm.ipn.mx


## Resumen

En el presente trabajo se trata con los estados de los tres quarks básicos y su relación de ortonormalidad, por medio de la cual se pueden obtener estados ortogonales tanto en el caso de estados de dos quarks, como en el caso más general de tres quarks, con lo cual los estados simétricos pasan a antisimétricos y de simetría mixta. Con el auxilio de algunos teoremas de la mecánica cuántica, se encuentra que los estados de quarks efectivamente pueden formar una base, no obstante que interaccionan fuertemente, algo no necesariamente válido para los operadores asociados, debido a que algunos de sus números cuánticos coinciden.


## Objetivo

Principalmente lo que se persigue es el entendimiento de manera general de una relación de ortonormalidad y su conexión con una base de estados que son linealmente independientes. En este trabajo tal relación para los quarks se aplica a estados generales de tres quarks, y con las propiedades del operador de isoespín, la obtención de estados ortogonales. Posteriormente, el intercambio entre diferentes quarks nos lleva a expresiones para estados totalmente simétricos, antisimétricos y de simetría mixta.

## Marco teórico

Esencialmente aquí lo que se utiliza son los estados de quarks con sus valores asignados de carga *Q*, tercera componente de isoespín $I_3$ e hipercarga Y, según se especifican en la ec. (1), es decir, éstos tratados como operadores que aplicados a los estados de quarks generan los números cuánticos dados. Lo que resta son desarrollos en los que se involucra de manera directa la relación de ortonormalidad entre quarks, ésta aquí asumida sin ninguna demostración explícita.

## Desarrollo

Sea triplete básico de quarks (Gibson y Pollard, 1980):

[64] Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional. Cd. de México.
[65] Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional. Cd. de México.

$$\begin{array}{cccc} & Q & I_3 & Y \\ \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} +\frac{1}{3} \\ +\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{array}$$

(1)

con

$$I_{-}u = d, I_{+}d = u,$$

(2)

$$p = uud, \quad n = udd,\ \pi^{+} = u\bar{d},\ \pi^{-} = \bar{u}d, \text{ etc.}$$

(3)

$\rightarrow \ (\langle ud| + \langle ud|, |du\rangle - |du\rangle) = \langle ud|ud\rangle - \langle ud|du\rangle + \langle du|ud\rangle -$
$\langle du|du\rangle =$

$$(a,a) - (a,b) + (b,a) - (b,b) = 1 - 0 + 0 - 1 = 0,$$

Aquí,

$$|a\rangle = |ud\rangle,\ \ |b\rangle = |du\rangle,$$

(4)

Así, el producto de un estado simétrico bajo el intercambio de partículas, por su correspondiente antisimétrico, es cero, esto es:

$$(\langle ud| + \langle ud|, |du\rangle - |du\rangle) = 0,$$

(5)

y el correspondiente estado normalizado es:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,(|ud\rangle - |du\rangle),$$

(6)

En el desarrollo de arriba, hemos utilizado que los estados de quarks están ortonormalizados de acuerdo con la relación:

$$\langle q_1' q_2' q_3' |\ q_1 q_2 q_3\ \rangle = \ \delta_{q_1'\ q_1}\ \ \delta_{q_2'\ q_2}\ \delta_{q_3'\ q_3} = P\ \ \delta_{q_i'\ q_i}$$

(7)

donde el índice *i* se refiere al índice de las partículas, esto es,

$$(q_1, q_2, q_3\,) = (u, d, s)$$

(8)

Bajo el intercambio de los tres quarks, se tienen los siguientes estados totalmente simétricos (S), antisimétricos (A), y de simetría mixta:

$$|\, q_1q_2q_3\rangle_S = (|\, q_1q_2q_3\rangle + |\, q_2q_1q_3\rangle) + (|\, q_2q_3q_1\rangle + |\, q_3q_2q_1\rangle) + (|\, q_3q_1q_2\rangle + |\, q_1q_3q_2\rangle)$$

(9)

$$|\, q_1q_2q_3\rangle_A = (|\, q_1q_2q_3\rangle - |\, q_2q_1q_3\rangle) + (|\, q_2q_3q_1\rangle - |\, q_3q_2q_1\rangle) + (|\, q_3q_1q_2\rangle - |\, q_1q_3q_2\rangle)$$

(10)

Un desarrollo típico de normalización es como sigue; sean:

$$\varphi_a = \sum a_i\varphi_i \text{ y } (\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij},$$

(11)

tal que

$$(\varphi_a, \varphi_a) = \sum_{i,j} a_i^* \, a_j \,(\varphi_i, \varphi_j) = \sum_{i,j} a_i^* \, a_j \, \delta_{ij} = \sum |a_i|^2$$

Así pues:

$$(\varphi_a, \varphi_a) = \sum |a_i|^2, \text{ norma de } \varphi_a,$$

(12)

Por lo tanto (Merzbacher, 1970): “vectores ortogonales son automáticamente linealmente independientes (l. i.),…tal que un conjunto ortonormal *puede* servir como base…*Asumimos*…que los vectores base *forman* un conjunto ortonormal”…,esto es, son l. i.

Asimismo, de (Dicke y Wittke, 1961), Teo. 2: “Dos eigenfunciones de un operador *A* son ortogonales si sus eigenvalores son diferentes”:

$$A\varphi_i = a_i\varphi_i \;\; y \; a_i \neq a_j \;\rightarrow (\varphi_i, \varphi_j) = 0,$$

(13)

En el caso de los quarks, sólo para *algunos* de sus *números cuánticos,* ver ec. (1),

$$A \rightarrow Q,\ S,\ I, \quad \text{con } \; q_i \neq q_j,$$

(14)

Pero la relación (13) se refiere en general a los tipos de quarks, no a sus números cuánticos, ver ec. (7a), por lo cual la ec. (12) no necesariamente aplica aquí.

Por otra parte, del teo. 5, ib., por el procedimiento de ortogonalización de Schmidt: “Las combinaciones lineales de $\varphi_i$ pueden formar un conjunto de funciones mutuamente ortogonales, las cuales son l. i., y pueden usarse para expandir cualquier otra eigenfunción correspondiente a un eigenvalor particular"; según esto, basta con que los eigenvalores de los operadores de quarks sean diferentes, ver (13), para que sean ortogonales y por lo tanto l. i., esto es, que formen una base. Así pues, el hecho de que los quarks interaccionan fuertemente no les impide que formen un conjunto ortonormal, y por lo tanto una base, ver (7), ello debido a lo establecido por la ec. (13) de sus diferentes eigenvalores, ver ec. (1).

## Aprendizajes esperados

Evidentemente aquí se espera que el estudiante que aún no está familiarizado con las relaciones de ortonormalidad de alguna manera se introduzcan a ellas y toquen ciertos puntos con los cuales están conectadas; en particular, los quarks nos ofrecen la oportunidad de tal tema, conectándonos a la vez con el mundo de las partículas elementales.

## Referencias


1. Gibson, W. M. and Pollard, B. R. (1980). *Symmetry principles in elementary particle physics*. London: Cambridge Univ. Press.
2. Merzbacher, E. (1970). *Quantum Mechanics*, U. S.A: John Wiley, second ed.
3. Dicke, R. H. y Wittke, J.P. (1961). *Introduction to Quantum Mechanics*, Massachusetts: Addison Wesley.

# La integración de los conceptos en una totalidad

José Antonio Peralta[66] y Porfirio Reyes López[66]
peralta @esfm.ipn.mx

En general en los cursos teóricos o las prácticas de laboratorio de Física II o Física III, en que se exponen las materias de elasticidad, fluidos, ondas y calor, o los diversos temas correspondientes a los cursos de electricidad y magnetismo, a los temas tratados no se les da un enfoque de acuerdo a las necesidades de nuestro país, por otra parte, se tiende a estudiar de manera aislada los conceptos contenidos en estos cursos siendo que en la realidad de la práctica profesional no se trabaja con conceptos aislados sino con situaciones concretas en que se deben considerar diversos conceptos entrelazados para llevar al fin esperado una tarea. Además, cuando se estudian estos conceptos de forma aislada, en general por parte de los alumnos no se les encuentra sentido, ni causan interés o curiosidad, así es que las prácticas dedicadas a estos temas se realizan más bien con aburrimiento o indiferencia sin que se genere en ellos una verdadera pasión, cuidado y concentración por lo que hacen.

Para superar estas deficiencias debemos proponer prácticas que impliquen el ensamble de diferentes conceptos, y además buscar sus diversas aplicaciones a nuestra realidad para que los alumnos desarrollen el interés, su curiosidad y su creatividad. Comentaremos algunas prácticas así como algunos problemas teóricos que hemos desarrollado para ilustrar con ejemplos concretos que es posible ofrecer a los alumnos otro tipo de materiales más eficientes para su aprendizaje y manejo simultáneo de los conceptos.

Es necesario subrayas que los objetivos, los procedimientos y resultados de estas prácticas ya han sido reportados en otros trabajos [1], aquí solo destacaremos la forma como desde el punto de vista de la enseñanza los conceptos físicos se imbrican en los casos citados, o como ciertos temas pueden estar enfocados directamente con las necesidades de nuestra realidad social inmediata.

***Electrolisis***

En esta práctica los alumnos deben montar un dispositivo para desarrollar un proceso de electrolisis, esto es del transporte de cargas positivas y negativas del ánodo al cátodo., cuando estas cargas son obtenidas en una solución de una sustancia ionizable, Los aspectos relevantes desde el punto de vista de la pedagogía y el aprendizaje son:

A) Los alumnos, divididos en equipos pequeños de 3 alumnos montan el dispositivo, este consiste en usar un recipiente con agua el cual tiene en sus extremos unos electrodos conectados a los polos positivos y negativos de una fuente de corriente directa.

B) Diluyen cloruro de sodio (sal común) en el agua hasta su saturación que se logra cuando la sal añadida ya no se diluye, sino que se asienta en el fondo del recipiente.

C) Se les explica qué al añadir cloruro de sodio, Na Cl, al agua, la molécula se separa en iones de sodio con una carga positiva $Na^+$, y que el cloro su vez adquiere una carga

[66]Departamento de Física de la Escuela Superior de Física y Matemáticas

negativa $Cl^{-}$, por tanto, al aplicar un voltaje a los electrodos habrá cargas que se desplazan bajo la acción del campo eléctrico creado por la fuente,

D) El sodio, al reaccionar con el agua en el electrodo negativo produce hidrógeno molecular $H_2$ y este debe ser capturado en un tubo de ensaye pequeño lleno de agua.

E) La corriente que circula en el circuito se mide cada cierto número de segundos con el voltaje en los extremos de una resistencia incrustada.

F) Mientras más tiempo dura la corriente mayor es la carga transportada y mayor es la cantidad de hidrógeno molecular formado y atrapado en el tubo pequeño. La carga total transportada cuando se termina el experimento es igual al área bajo la curva en la gráfica de corriente en función del tiempo.

G) Una vez calculada la carga **q** se divide entre la carga de los 2 electrones necesarios para formar una molécula de hidrógeno, esto nos da el número $N_1$de moléculas atrapadas en el tubo.

H) Midiendo la presión atmosférica, el volumen de gas atrapado y la temperatura en grados Kelvin, se puede encontrar el número de moles y con ello el número de partículas $N_2$ que de acuerdo con la ley general de los gases ideales debe de estar dentro del tubo de ensaye. Para ello, se calcula la presión atmosférica a la altura de la ciudad de México recurriendo a la fórmula aprendida en el curso de Física II de la forma matemática como varía la densidad en el aire en función de la altura sobre el nivel del mar.

I) Finalmente se confrontan los valores de $N_1$ y $N_2$, que de acuerdo a ambos métodos deben de ser aproximadamente iguales.

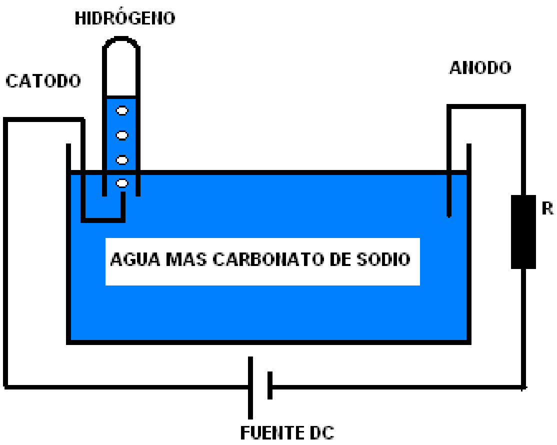



Figura 1. Arreglo experimental para el experimento de electrolisis.

Como se observa en esta práctica no se ha medido un parámetro aislado, sino un conjunto de parámetros mutuamente entrelazados, tanto de acuerdo a las leyes del electromagnetismo como de la teoría cinética de los gases ideales. Se han usado los conceptos de carga, de ionización, de soluciones saturadas, de la ley de Ohm que nos permite calcular la corriente mediante medidas de resistencia y voltaje, se ha usado el concepto de integración de la corriente en función del tiempo para obtener la carga. Por otra parte, se han usado los conceptos de presión, volumen y temperatura para obtener el número de partículas dentro de un volumen dado. Para medir la presión se ha tenido que considerar que la presión atmosférica varía en función de la altura y que la ciudad de México está a una altura media de 2400 m sobre el nivel del mar, dato que usualmente los alumnos ignoran. ¡Todo un entrelazamiento de conceptos! Además, se han unido los conceptos de las reacciones químicas con los conceptos de la termodinámica y el electromagnetismo, por otra parte, los alumnos, a partir de un esquema en el que solo se les dan las instrucciones generales, han tenido que armar el dispositivo sin esperar que el técnico del laboratorio meta las manos por ellos como usualmente se acostumbra en muchas prácticas.

**Resonancia de un resorte**

En este caso hemos puesto en práctica el caso de un resorte presentado en un libro de texto de MIT [2]. En este ejemplo de resonancia se coloca en el extremo de un resorte una masa y luego el otro extremo del resorte se cuelga de una polea mediante una cuerda delgada. La cuerda a su vez pasa por otra polea para que adopte una posición vertical y pueda conectarse con un pivote que oscila a diferentes frecuencias y amplitudes, tal como se observa en la figura 2. Este oscilador mecánico es uno de los aditamentos de un equipo computarizado que pertenece al laboratorio de Física II de la ESFM. El equipo tiene un programa que permite variar tanto la frecuencia, la amplitud, como la forma en que se mueve el pivote y permite gradaciones muy finas que van desde las décimas de Hz hasta las frecuencias del rango audible. En esta práctica lo primero que hacen los alumnos es medir para un resorte y una masa dada ***M*** su frecuencia de oscilación. A propuesta de los alumnos la frecuencia se mide grabando las oscilaciones del sistema resorte-masa con un celular para qué midan el tiempo total de un cierto número de oscilaciones y de ahí obtengan el promedio del período ***T***. En el siguiente paso obtienen la constante ***K*** del resorte a partir medir la elongación ***l*** del resorte bajo la acción de una determinada fuerza ***F***; con los valores de ***K*** y ***M*** determinan la frecuencia ***f*** y la confrontan con la obtenida experimentalmente. Con ello obtiene la frecuencia natural del sistema y, lo que es muy importante, **verifican que ésta se mantiene constante al margen de la amplitud de las oscilaciones del resorte**. Una vez que han obtenido por 2 métodos la frecuencia natural del sistema hacen oscilar el pivote variando poco a poco su frecuencia y observando la forma como oscila la masa. Finalmente comprueban que, efectivamente, cuando el pivote oscila a la frecuencia natural del sistema, la masa oscila con gran amplitud. Esto lo realizan para diferentes amplitudes de oscilación del pivote y con ello comprueban también que el estado de resonancia no depende de la amplitud de la fuerza oscilante.

Una vez hecha la práctica, que causa una fuerte impresión a los alumnos y los coloca en un estado mental abierto para reflexionar sobre este fenómeno, el maestro pregunta por los diversos casos de resonancia que los alumnos conocen. Luego de que se hace una enumeración de ejemplos reales de resonancia cercanos a las experiencias cotidianas de los alumnos, se discute en particular los estados de resonancia producidos por un sismo, en este caso se señala que la fuerza oscilante es el suelo, y que los sistemas elásticos con frecuencias naturales son los edificios. Enseguida se puede proponer a los alumnos a que revivan sus experiencias de los sismos que hayan vivido y que rememoren el período de las oscilaciones y asocien a los valores sugeridos su frecuencia; luego de que el maestro proporciona el dato del rango de períodos o frecuencia propias de los sismos (0.5-2.o Hz) se les induce a pensar cuáles son los edificios que pueden tener mayor período de oscilación en función de su altura y que pueden coincidir con la frecuencia de los sismos (edificios de 5 a 7 pisos de altura). Luego de ello hace la pregunta de cómo es posible variar la frecuencia natural de los edificios en riesgo de resonancia, para ello los alumnos tienen que recordar los fenómenos elásticos de compresión y de flexión de una barra. De esta manera los alumnos quedan mentalmente motivados para investigar el efecto de cómo cambian las frecuencias naturales de los edificios cuando se les incrustan través para formar triángulos en sus estructuras, tal como los alumnos lo pueden comprobar con un simple recorrido por las zonas céntricas de la ciudad.

Como se observa en esta práctica hay un ensamble de conceptos como son la constante elástica de un resorte, el sistema resorte masa, la frecuencia natural de los sistemas elásticos, las fuerzas oscilantes, el fenómeno de resonancia, los diversos casos de resonancia en la vida real, la resonancia y los sismos, el cambio de le frecuencia natural de una estructura agregando elementos simples a ella, y todo ello enriquece a cada uno de estos conceptos al conjuntarlos en una estructura de conocimientos muy útil para entender los fenómenos de la realidad y ligar, efectivamente, la teoría con la práctica..

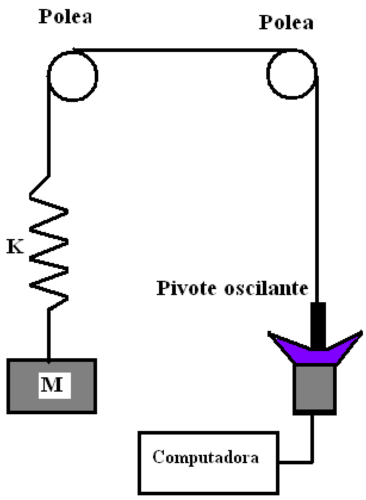



Figura 2. Dispositivo experimental para analizar el efecto de Resonancia

***Los temas de Física II***

En cuanto a la materia de Física II hay que señalar también que los diversos temas que contiene esta materia también tienden a enseñarse aisladamente. Al tema de elasticidad se le reduce a la exposición de la deformación que sufre un cuerpo cuando se le somete a una fuerza, pero no se les empuja a mirar en su entorno para que detecten en las diversas estructuras, tales como edificios, puentes, torres, y las formas como se han aplicado por los ingenieros los conocimientos de la elasticidad. Tampoco se discuten las frecuencias naturales que toda estructura elástica tiene y su relación con los fenómenos de resonancia que pueden ocurrir en caso de sismos. Asimismo, no se les muestra cómo los tubos por sus resistencias estructurales tanto a la rotación como flexión se presentan no solo en la ingeniería, sino en las estructuras vegetales, así como en las estructuras animales. En cuanto al tema de fluidos también es rico en conceptos aplicables a la explicación de múltiples fenómenos de la tecnología o de la naturaleza. En particular el concepto de energía se puede destacar cuando se estudia el teorema de Bernoulli ya que el uso de la energía eólica no solo ya se aplica en nuestro país, sino que tiende a expandirse en cuanto a energía limpia. Lo mismo se puede decir de los temas de ondas, así como de calor. En el aspecto de la teoría quisiéramos mencionar finalmente un hecho. Los libros de texto que usamos complementan los temas de teoría con un anexo de problemas. Los problemas tienen que ver en general con los temas que son de importancia en países desarrollados, por ejemplo, los problemas relacionados con las trayectorias de proyectiles. En vez de ello podríamos comenzar a elaborar problemas relacionados con nuestra propia realidad, por ejemplo, con respecto al tema de fluidos se pueden plantear de forma explícita las preguntas de cuál es la potencia necesaria para subir 20 metros cúbicos de agua por segundo desde el río Cutzamala, hasta la ciudad de México que está 800 metros por encima de este río o el de calcular la pérdida de energía que implica para un flujo de 80 metros cúbicos por segundo de aguas residuales descender desde la ciudad de México hasta el puerto de Tampico. Otro problema puede ser el de calcular el volumen de aire estancado que ocurre en el Valle de México en invierno cuando se da el fenómeno de inversión térmica. También se puede preguntar cuál es la baja en la densidad de Oxígeno cuando se asciende desde Acapulco hasta la ciudad de México.

### *Conclusiones*

Con este tipo prácticas y de problemas la atención de los alumnos se enfoca desde la enseñanza misma hacia problemas importantes de nuestra propia realidad, porque es curioso que al trabajar con problemas propios de los libros de texto de otros países pensemos en lo que para ellos es importante, como si desde los mismos libros de texto dirigieran nuestros pensamientos y no enfocáramos nuestra mente hacía la reflexión y la eventual solución de nuestros propios problemas.

Referencias

[1] J. A. Peralta y P. Reyes López, Verificación de la ley general de los gases ideales mediante medidas de corriente en un proceso de electrolisis, Memorias de la XVII Reunión Nacional de Física y Matemáticas en la ESFM 2018,

[2] A. P French, Vibraciones y Ondas, Ed. Reverté, 1982.

[3] J. A. Peralta, Notas del curso de Física II, Departamento de Física de la E.S.F.M. IPN

# La escuela Rural: sus enseñanzas para la Reforma Educativa en la 4t

José Antonio Peralta[67]
peralta @esfm.ipn.mx

**Resumen**

Fue en los años 30 del siglo XIX cuando el Doctor Mora señaló enfáticamente cómo la educación en nuestro país separaba a la teoría de la práctica, sin que ella sirviera a la creación de una sociedad desligada de sus lastres medievales. Afortunadamente luego de la Revolución Mexicana en el siglo XX se desató un poderoso impulso para extender la educación en las comunidades más atrasadas de nuestro país, pero para ello primero se hizo un recuento de los múltiples atrasos que caracterizaban la vida campesina y en función de ello se diseñaron programas de educación enfocados a combatir estos múltiples atrasos. Esta educación no solo estaba dirigida a los niños, sino a los adultos considerando que la educación de un niño comienza en el hogar a través de los padres. Varios aspectos de esta educación fueron novedosos, por ejemplo, la aritmética se aprendía a través de la comercialización que los niños hacía de los productos de los huertos asociados a las escuelas, también mediante el cultivo se aprendía botánica .En este trabajo se pretende rememorar ese tipo de enseñanza para impulsar en el momento actual los cambios en los contenidos de la educación en general, así como en sus métodos, ya que, desgraciadamente sigue privando una separación entre las formas como se enseña, se aprende y nuestras formas cotidianas de vida.

## Introducción

Pasa en México que se pueden distinguir 4 impulsos de reforma en los sistemas de enseñanza a lo largo de su historia. Uno de ellos ocurre en el período inmediatamente posterior a la independencia durante el gobierno de Valentín López Farías, cuando el ala radical de los liberales toma momentáneamente el poder [1]. Otro impulso que guarda cierta continuidad con el anterior ocurre casi 40 años después, cuando en el país la larga contienda entre conservadores y liberales se decide a favor de éstos últimos y ocupa la presidencia Benito Juárez; [2,3]. Distinguimos otro impulso en el período posterior a la revolución de 1910, que halla su expresión más significativa en la enseñanza rural [4, 5, 6], y finalmente la propuesta de reforma educativa que se lleva a cabo en el gobierno de la 4T.

Esta periodización parece natural, ya que cuando las guerras civiles entre fracciones de la sociedad con proyectos de nación contrapuestos se deciden a favor de los grupos progresistas, luego de destruir las instituciones caducas estos grupos se plantean reformas importantes en el modo de vida, y disponen de espacios en los cuales se ensayan proyectos que durante largo tiempo se mantuvieron soterrados en estado de puro deseo.

[67] Departamento de Física de la Escuela Superior de Física y Matemáticas

Situémonos en el estado de la sociedad mexicana tal cual estaba cuando se firma por fin la independencia de España. ¿Quién ocupará ahora el poder?, ¿qué formas de gobierno se adoptarán?, ¿qué tipo de economía se impulsará? cuando la sociedad mexicana se plantea estas preguntas aparecen de inmediato los intereses contrapuestos de los diferentes grupos que conformaban nuestra sociedad [1,4]. Pensemos en el clero; en las etapas finales de la Colonia su poder e influencia había sido disminuida por el poder español y ahora ante la falta de la supervisión impuesta por el monarca español, veía la oportunidad de recuperar sus prebendas económicas y su tremenda influencia sobre prácticamente todos los aspectos de la vida social e individual. Pensemos también en la aristocracia criolla, libres de la tutela e imposiciones del poder español, podían aspirar a ocupar puestos importantes en el gobierno que antes les habían sido negados [5]. Pensemos también en los intereses del capital extranjero, ahora que las prohibiciones comerciales y de inversión en beneficio de la economía española habían desaparecido podían impulsar sus inversiones en nuestro país, y asimismo desarrollar el intercambio comercial que antes se les había negado. Pensemos también en la clase media ilustrada, aquella que sin poseer capitales ni poder se había nutrido de las imágenes de una nueva sociedad que les habían llegado de Francia, de Inglaterra y de los Estados Unidos, y deseaban sinceramente un cambio en el régimen de vida que nos beneficiara a todos, y pensemos también en los individuos de la clase media que solamente veían en el país independiente la posibilidad de mejorar su posición social, sin desear un mayor cambio.

Así, unos grupos querían perpetuar las antiguas formas del gobierno colonial, pero con ellos en las altas esferas del poder, otros querían conservar las costumbres y las formas de pensamiento y de conducta de la Colonia, porque eso fortalecía su poder y su influencia social. Otros grupos deseaban modificar la economía porque eso representaba la posibilidad de acrecentar sus capitales, o de invertirlos en ramas de la producción antes prohibidas. Finalmente, otros grupos querían sinceramente el progreso de nuestro país, su modernización, la cual no podría significar otra cosa en esa época que la adopción de formas republicanas de gobierno, y el desarrollo de la industria, teniendo en mente las imágenes de las formas de vida de los países más avanzados tales como Inglaterra o Estados Unidos.

Es claro que, dependiendo de sus intereses, cada grupo expresaba a través de sus más conspicuos representantes propuestas de sociedad diferentes, y es claro también que mientras una determinada fracción de la sociedad no se impusiera sobre el resto, no podrían instalarse de manera estable las diferentes instituciones sociales que dan la identidad a un país.

**La educación en la etapa posterior a la Independencia**

El Dr. Mora era uno de los integrantes del grupo social que deseaba impulsar la forma republicana de vida, así como el desarrollo de la industria en nuestro país, por ello su propuesta de sistema educativo, de los contenidos y las formas de la enseñanza eran coherentes con su visión del nuevo país que habría de surgir.
Lo que hay que resaltar del Doctor. Mora es que antes de proponerse a tontas y a locas cambios en la sociedad, hace un estudio meditado de los diferentes

aspectos de la vida social, así como un médico palpa y analiza un cuerpo con todo detalle para detectar lo que está bien y lo que está mal antes de prescribir una cura. En diferentes escritos nos presenta análisis de la economía, de los diferentes estratos sociales que conforman al país, del espíritu de cuerpo que privaba entre los militares y los eclesiásticos y que se anteponía al interés nacional, de nuestros hábitos y costumbres, del poder del clero, del estado de las finanzas públicas y de las deudas del Estado etc. [1].

Pues bien, entre ese repaso crítico del estado de nuestra sociedad el Doctor Mora incluye un detallado análisis de la enseñanza que se practicaba en las escuelas elementales, en los Colegios y en la Universidad. Lo que encuentra es que mucho de sus contenidos y sus métodos eran funcionales para los fines del antiguo régimen colonial de claro tinte medieval, pero no para los fines de la nueva sociedad moderna e industrializada que él , como muchos otros, deseaban.

Aunque en 1933 el presidente de la nación era Antonio López de Santa Anna, éste se había retirado para administrar y gozar de sus posesiones, y sin más había delegado la práctica real del poder ejecutivo con todas sus pesadas obligaciones burocráticas en el vicepresidente Valentín Gómez Farías. Entre las varias reformas que éste personaje se propuso con el auxilio de la fracción de liberales radicales que lo apoyaban, está una gran reforma educativa, acción para la cual estaba auxiliado muy de cerca por el Doctor. Mora.

El Doctor Mora combatió el monopolio de la Iglesia sobre la educación elemental y alentó las iniciativas de los particulares para formar escuelas primarias, y de hecho vio en la iniciativa privada la emergencia de fuerzas sociales que bajo el antiguo régimen se habían mantenido reprimidas. Con fino olfato sociológico entendió también que en estas escuelas recientemente formadas no había que luchar contra los viejos hábitos, al contrario de las escuelas antiguas y tradicionales donde los viejos hábitos coloniales estaban muy consolidados. Alentó también la desaparición de los antiguos colegios, por considerar su enseñanza y sus métodos no solamente inútiles sino perniciosos, ya que eran propios de individuos dispuestos a llevar una vida monacal, pero no de individuos que estuviesen dispuestos a participar activamente en la formación de una nueva nación. Alentó también la desaparición de la venerable Universidad por parecidas razones, lo cual aún en mentes liberales causó cierto escándalo.
Entre el cúmulo de atinadas observaciones que dejó impresas en la prensa liberal de su época cabe destacar esta cita [1]:

> *El que se ha educado en colegio ha visto por sus propios ojos que de cuanto se le ha dicho y enseñado nada o muy poca cosa es aplicable a los usos de la vida ordinaria; que ésta reposa bajo otras leyes que le son desconocidas, de que nada se le ha hablado, y que tienen por base las necesidades comunes y ordinarias que jamás son objeto del estudio y se hallan por lo mismo abandonadas a la rutina. Esto lo conduce naturalmente a hacer una distinción entre lo que se enseña y lo que se obra, o como se dice entre nosotros, entre la teoría y la práctica.*

Es alrededor de este señalamiento que quisiéramos desarrollar nuestro breve repaso histórico de la educación, ya que a nuestro parecer ***esta escisión entre lo que se aprende en la escuela y lo que se debe saber para enfrentar las necesidades de la vida real*****,** sigue apareciendo aún en el presente.

Desgraciadamente las propuestas de la reforma educativa no pudieron llevarse a cabo o no pudieron consolidarse, porque el gobierno de López Farías solo dura alrededor de 11 meses ya que los grupos conservadores de la sociedad, lesionados de lleno en sus intereses, organizan una rebelión contra el gobierno de López Farías, e instalan de nuevo en el poder en 1834 al general Antonio López de Santa Anna, el cual anula casi todas las propuestas si bien la educación no vuelve del todo al poder del clero.

Aún bajo el dominio político de los conservadores el sistema de educación primaria experimenta una ampliación, y es así que el ministro de Relaciones Manuel Baranda [2] informa ante el congreso que en 1843 el número de escuelas primarias registradas ascendía a 1310, esto en comparación a las cuantas decenas de escuelas que operaban en México al final de la Colonia, sin embargo, el progreso había sido puramente cuantitativo, ya que el contenido de la educación así como sus métodos eran semejantes a los de la Colonia: enseñanza de rudimentos de escritura y lectura, rudimentos también de aritmética y estudio del catecismo del padre Ripalda, además que de se practicaban en muchas escuelas los castigos y humillaciones corporales que se consideraban auxiliares pedagógicos de primera mano tal como lo ilustra elocuentemente Ignacio Manuel Altamirano [7], Por lo demás. el dominio del clero sobre la educación fue consagrado oficialmente, ya que el artículo 60 de las Bases Orgánicas – una legislación establecida por el dictador Santa Anna- establecía claramente que la educación tendría una finalidad religiosa.

**La educación en la etapa de la reforma y el porfiriato**

Luego de la guerra contra Estados Unidos que en 1847 termina de manera desastrosa con la pérdida de más de la mitad del territorio, los grupos liberales vuelven a la acción, y en 1853 emprenden una guerra civil, la cual luego de 3 años terminará con su victoria. En 1857 se promulga la Constitución de la República, que, entre otros puntos, confiere carácter civil a muchas funciones sociales que anteriormente eran desempeñadas por el clero, por ejemplo, el registro de nacimientos y muertes, así como la educación elemental. Pero el carácter laico de la educación no sería establecido oficialmente sino hasta después del triunfo sobre el efímero imperio instaurado por Maximiliano y los conservadores en el año de 1874, (adelantándose a la nación francesa la cual no lo hizo sino hasta 1880) [ 2].

Pese a la gran inestabilidad social y política que caracterizó la primera mitad del siglo XIX en México, y de la gran penuria en que quedó el país luego del prolongado período de guerras civiles y contra países extranjeros, el número de escuelas crece de una manera espectacular ya que si en 1843 el número de escuelas en toda la república era de 1310, en 1874 ya eran 8103. esto es, que tal como lo señalamos anteriormente en el período inmediatamente posterior al triunfo definitivo de los liberales la educación popular recibe un gran impulso. De este número de escuelas "603 eran sostenidas por la federación y los estados, 5240 por las municipalidades, 378 por corporaciones o individuos particulares, 117 por el clero católico u otras asociaciones religiosas, 1581 eran privadas de paga y 184 estaban sin clasificar. Es decir, de 2016 escuelas particulares solo 117 estaban directamente dirigidas por asociaciones religiosas y aún considerando que el total de éstas fuera de tendencia confesional de cualquier forma eran sólo una cuarta parte del total" [ 2 ].

En estos años, los esfuerzos que la sociedad dedicaba a la educación de los niños ya era tan significativo como para pensar en una preparación profesional de los educadores, y es así que en 1887 se inaugura la Escuela Normal para Profesores en el Distrito Federal, aunque ya antes funcionaban en el interior de la República las escuelas normales de San Luis Potosí, Guadalajara, Puebla, Nuevo León, Michoacán, Querétaro y Veracruz.

Como sabemos, en 1877 asciende al poder Porfirio Díaz para permanecer en el cargo de presidente hasta 1911. Durante su gobierno dictatorial se dio en el país un notable desarrollo económico, y baste como índice de este desarrollo el crecimiento de las vías férreas, que de alrededor de 500 Km ascendieron hasta más de 20 000 Km. La ciudad de México, por otra parte, perdió su carácter colonial ya que en su centro se construyeron una gran cantidad de edificios modernos y en ciertas zonas de la metrópoli hasta parecía que un pedazo de las ciudades europeas había sido trasplantado a nuestro país. Pese a este desarrollo económico y despliegue de obras de gran lujo como el Palacio de Bellas Artes, el edificio de Correos, y tantos otros más, el presupuesto destinado a la educación primaria llegó a alcanzar apenas el 0.04 % del gasto público. Sin embargo, el crecimiento en la educación popular logrado durante los anteriores gobiernos liberales legó al porfiriato un ambiente propicio para que se multiplicaran las discusiones sobre pedagogía, editándose un número importante de revistas dedicadas a este tema. Es entonces cuando empiezan a surgir pedagogos como Torres Quintero, Enrique Laubscher, Enrique C. Rébsamen y el maestro Carlos A. Carrillo.

En 1889 se realiza el Primer Congreso Pedagógico, en donde se discuten y sistematizan las experiencias propias de los educadores mexicanos y se plantean una serie de objetivos muy avanzados en materia de educación elemental. Pero es evidente que con tan escasos recursos dedicados a la educación primaria, esta serie de objetivos no saldrían del plano de las buenas intenciones, sin tener apenas repercusiones reales sobre el sistema educativo.
El hecho es que el porfiriato deja un saldo muy alto de analfabetas, ya que con una población de 12.6 millones de habitantes en 1895 más de 10.4 millones no sabían ni leer ni escribir, y por otra parte con una población de 2.5 millones de jóvenes en edad escolar, solamente 800 mil la recibían. Por otra parte, la población del campo prácticamente no fue tomada en cuenta en el sistema educativo nacional y ésta fue delegada en los hacendados [8].

### La educación rural en la etapa posrevolucionaria

Como sabemos. todo el descontento acumulado a lo largo de la prolongada dictadura porfirista estalla en 1910, pero si la caída del antiguo gobierno fue

relativamente sencilla e incruenta, la formación del nuevo estado necesitó en cambio de 7 largos años de lucha armada entre diferentes facciones. Al término de esta etapa vino luego la fase de reconstrucción y construcción de los nuevos marcos y normas de vida para las diferentes clases y grupo sociales del país.
En lo que se refiere a la educación popular nosotros creemos que es en la etapa pos-revolucionaria donde en el terreno de la educación rural las corrientes progresistas lograron alcanzar su máxima expresión, legando a las generaciones futuras verdaderos paradigmas de lo que puede ser una educación popular eficaz. Es natural que en este terreno se hayan alcanzado las más valiosas innovaciones ya que era un terreno casi virgen, en donde, a diferencia de lo que ocurría en las escuelas urbanas, no había ningún vicio o costumbre que combatir en el sistema de enseñanza por la simple y sencilla razón de que en el campo prácticamente no había existido la educación.

Ya bajo el nuevo régimen, en el gobierno de Obregón, José Vasconcelos se hace cargo de la Secretaría de Educación Pública, y se crea un nuevo sistema de escuelas rurales, para ello se encarga a un grupo de maestros – a los que se denomina “Maestros misioneros” – que viajen por todo el país para tener un conocimiento directo de las comunidades indígenas, de sus condiciones de vida y de sus necesidades, y también para convencer mediante pláticas a los grupos reacios de la conveniencia de instalar en sus poblados una escuela rural [9].

Si su propuesta era aceptada, la comunidad se involucraba proporcionando y acondicionando el local escogido para la escuela, pero además de enseñarles los conocimientos tradicionales de lenguaje y aritmética se enseñaban otros temas que económica y socialmente les podrían ser provechosos. Al final de la administración de Vasconcelos en 1924 ya existían mas de 1 000 escuelas rurales, que además del nombre de escuelas llegaron a tener el nombre de Casas del Pueblo, atendiendo globalmente a unos 65 mil estudiantes. El nombre adjunto era acertado, y se razonaba de la siguiente manera: si el local fue construido por la comunidad, y si la comunidad requiere de un local para discutir los temas de interés comunitario, la escuela debe ser “La casa del pueblo” [ 5, 6 ,9 ].

Ejidatarios que construyeron la escuela en el poblado El Cuije. Coahuila, 1938. *José Reyes Pimentel.*

Al renunciar Vasconcelos a la dirección de la Secretaría de Educación Pública, no por ello la proliferación de escuelas rurales se detiene, y es así que bajo la dirección de Manuel Puig Casaurant no solo el número crece, sino que los objetivos de la enseñanza rural se afinan. En 1928 el número de escuelas rurales se acerca a los 5 000 y se enuncian explícitamente sus fines: la escuela debe transformar íntegramente la vida de las comunidades: biológicamente con el mejoramiento de la salud, económicamente con la introducción de métodos modernos de producción, culturalmente con la enseñanza de adelantos contemporáneos en ciencias y tecnología, y socialmente con la preservación de la vitalidad espiritual de la herencia indígena.

Bajo la dirección de Francisco Bassols, durante el gobierno cardenista, el número de escuelas sigue aumentando hasta 8155 y en base a la experiencia acumulada se detectan los errores y se hacen importantes cambios para intentar corregirlos. De esta manera hacia 1940 operan 33 escuelas normales dedicadas a formar maestros para el campo a las que se denominan Escuelas Regionales Campesinas, con un total de más de 4 mil alumnos. Entre sus características novedosas es que no se admiten ya estudiantes sin antecedentes rurales [5,6]

Nada mejor que recurrir a los textos de Rafael Ramírez, el gran pedagogo veracruzano, que dedicó sus mejores energías al desarrollo de la escuela rural, para ilustrar los momentos luminosos de esta etapa en nuestra historia de la educación elemental, y que se puede considerar como un producto de los grupos sociales de tendencia radical que intervinieron en la Revolución [10].

En primer lugar, Ramírez hace un reconocimiento de la importancia de la población rural en relación a la población total de nuestro país, así él señala que tres cuartas partes de la población “residen en el campo derivando del trabajo de la tierra su diario sustento”. ¿Cómo es posible que tal fracción de la población haya sido mantenida en el olvido, en lo que se refiere a educación durante el gobierno porfirista? La explicación reside en el gran desprecio que el dictador manifestó hacia el campesinado pobre, al contrario de los privilegios que concedió a los grandes hacendados.

Los fines que Rafael Ramírez asigna a la educación rural son claros y contundentes. Muchos maestros entienden que la educación rural solo concierne a los niños, permaneciendo indiferentes ante los adultos y ante los problemas del caserío que circunda a la escuela. Por el contrario, el buen maestro consciente de su papel, además de educar a los niños instruye a los adultos, presta atención a las comunidades, ayuda a los vecinos a descubrir los problemas comunes y los organiza para resolverlos.

Es aquí donde Ramírez, manteniéndose en la línea crítica del Doctor Mora, implementa un concepto de la educación que ha sido reconocido por los grandes teóricos de la enseñanza, ya que señala que cuando se enseñan conocimientos que no se incorporan a los usos cotidianos, no son realmente asimilados por los educandos: *“Es probable que muchos campesinos hayan aprendido en ellas (las escuelas convencionales) a leer, escribir y contar, pero es seguro que esos instrumentos de cultura por no tener manera de usarlos, les serán inútiles”.*

Así, éste educador, en vista de que la gente del campo se gana el sustento trabajando la tierra, y de que se ha mantenido en un estado de gran atraso cultural que raya en la barbarie, se plantea con toda naturalidad, desde el momento en que la educación debe tener como objetivo transformar la vida, ***poner atención a la forma como trabajan éstas gentes*** para sugerir mejoras que hagan mas eficiente su labor en beneficio de su economía, **y *poner atención también a los aspectos atrasados y bárbaros de su forma de vida*** ya a nivel de comunidad o de la vida doméstica, para mejorarla en todos sentidos. Para ello propone los siguientes puntos que debe contemplar la educación rural:

a) Enseñar **activamente** conocimientos que proporcionen una educación económica.
b) Actividades que proporcionen una educación higiénica.
c) Actividades que proporcionen una educación doméstica.
d) Actividades que recreen y eduquen para aprovechar valiosamente los ratos de ocio.
e) Actividades que proporcionen la instrucción mínima deseable para todos los habitantes del país.

Para implementar estos objetivos propone en primer lugar que cada escuela tenga un huerto, y es que, en efecto, los motivos de aprendizaje que surgen del cultivo de los huertos son variados: *"Ninguna materia del viejo programa en tan rica en motivos de educación, no contribuye tanto al desarrollo físico y mental del niño, como los trabajos agrícolas realizados en el huerto ... las prácticas que ejecuten al medir y trazar el huerto, al sembrar y al levantar la cosecha y al vender los productos, darán motivos bastantes para que adquieran conocimientos matemáticos que necesitan; muchos ejercicios de lenguaje pueden ser inspirados por los trabajos agrícolas a que los niños se dediquen; la botánica, la biología, el dibujo, la geografía, la historia, así como el civismo, pueden también encontrar motivación en las faenas del huerto de una manera natural, y hasta algunas nociones concretas sobre el comercio si los maestros sugieren la formación de cajas de ahorro y cooperativas escolares, o si inducen a los alumnos a depositar sus ganancias en los bancos".*

Prácticas agrícolas. Cosecha de chile poblano. San Luis de la Paz, Guanajuato. *Jesús Frías Morales.*

Día de aseo general. San Luis de la Paz, Guanajuato. *Jesús Frías Morales.*

Y con visión premonitoria previene de una realidad que hoy todos estamos padeciendo como es la saturación de la población urbana, al afirmar que si se consiguen estos objetivos "será posible conseguir que la gente, sintiendo amor y apego a la vida del campo, deje de emigrar hacia las ciudades, peligro que, de no conjurarse, sería de fatales consecuencias ...".
Ramírez también enuncia el siguiente aforismo, el cual sería necesario meditarlo largamente para extraer todo su rico contenido, que por lo demás está en total acuerdo con los descubrimientos de varios destacados educadores tales como Piaget:

> Las nociones que no son capaces de transformarse en formas de conducta no merecen el nombre de conocimiento ni valen la pena de aprenderse en los primeros años.

Son los años de oro de la enseñanza rural; miles de maestros a lo largo y a lo ancho de la República, si bien con diferentes niveles de éxito tal como detalladamente lo señala Mary Vaughan [ 11, 12] ] practican una pedagogía que nunca antes, ni nunca después, alcanzaría tales niveles de significación social.

Subrayemos las principales características de esta singular forma de enseñanza:

1) Es la comunidad quien, impulsada por el maestro, construye el local que ha de servir de escuela. De esta manera desde los primeros momentos la comunidad se involucra con su funcionamiento y la hace suya.
2) El objetivo de la actividad del maestro no es la enseñanza en sí de un conjunto de conocimientos muertos, inactivos e inertes, sino la transformación positiva de las formas de vida de la comunidad.
3) En función de este objetivo es que se seleccionan las formas y los contenidos de la enseñanza; los maestros rurales están obligados a entender que la mira de la escuela debe ser puesta en el mejoramiento de la salud, la dignificación del hogar y la vida doméstica, el mejoramiento de las técnicas de producción con que la gente se gana el sustento, y asimismo en la creación de una vida social que saque de su postración a los individuos.

4) Y es por eso, porque el objetivo central de la enseñanza es modificar la vida y no adecuarla a un estado de resignación, que se deben abandonar los viejos métodos puramente verbalizantes y memorizantes de enseñanza para cambiarlos por una enseñanza activa.
5) Para ello se dota a cada una de una parcela de terreno cultivable, el llamado huerto escolar, así como de animales de crianza y de los implementos y herramientas requeridos, todos ellos aportados por la comunidad, con lo cual fortalecen los lazos de unión entre la escuela y el poblado.
6) Las horas dedicadas a las labores del huerto se consideran horas de clase en la medida en que el comentario pedagógico acompaña a la experiencia directa.
7) Se da así preferencia a la enseñanza derivada directamente del trabajo y se reservan las clases formales para la lectura, la aritmética y para sistematizar de tiempo en tiempo los conocimientos que se vayan adquiriendo con el trabajo.
8) Los maestros incitan a la transformación de los diferentes aspectos de la vida comunitaria: personalmente llevan a los niños al río o a la acequia para bañarlos, establecen la peluquería del poblado, maestros y alumnos queman la basura, pintan la escuela, promueven la vacunación de los vecinos, montan dispensarios médicos con servicios de consulta, crean clubes deportivos, ligas antialcohólicas.
9) Como el objetivo central de la labor del maestro es transformar la vida de la comunidad también hay clases de alfabetización para adultos, así como clases de labores manuales para las amas de casa.

Se ve de estas observaciones que, si el maestro habita en la comunidad, la vive en todos sus aspectos hasta conocer con el máximo de detalle los momentos que conforman una vida cotidiana, y se involucra con las necesidades de la comunidad hasta un punto en que su labor necesariamente se politiza.
Surge así un criterio de eficacia en la educación que aún hoy continua vigente ya que ésta se mide en base a las mejoras y a los cambios que ha inducido en la comunidad.

Fracaso es enseñar durante años haciendo aprender una sarta de datos que se olvidan y se reabsorben sin producir ningún cambio o efecto positivo. Este criterio de calificación de la enseñanza es absolutamente revolucionario ya que no contempla solamente los logros obtenidos al puro interior de la escuela, sino su difusión al medio social que la rodea.

> *No basta con que la escuela cuente con preciosas crías de animales, árboles, ricos cultivos, si estas actividades y estos beneficios no son implantados en cada hogar... todas las actividades deben ser socializadas so pena de hacer de la escuela un centro en que se despilfarren las energías de los campesinos y se frustren los fines de la educación.*

La forma tan peculiar de enseñanza que acabamos de describir alcanzó su máxima expresión en el período cardenista, pero en los siguientes períodos fue duramente atacada por las fuerzas reaccionarias de nuestro país, y en el período de la reacción no pudo volver a recuperar su antigua influencia, la educación rural fue perdiendo poco a poco sus rasgos innovadores hasta adquirir un carácter muy convencional, como por ejemplo, que la educación se centrara tan solo en los niños pero se hiciera a un lado la educación comunal.

## La enseñanza en la época actual

En cuanto a la enseñanza actual que se practica en las ciudades solo podemos decir que millones de niños dedican las mejores horas de sus días y los mejores años de su infancia a asistir a una escuela en donde en general muy pocas veces se tocan temas que se adecuen a sus intereses propios, así, se les enseña geografía de un país que la gran mayoría jamás recorrerá, se les enseña una historia falseada en donde los personajes históricos reales se han convertido en monigotes que no los incitan a la emulación. Los maestros no palpan primero el estado general de sus necesidades y los aspectos atrasados de sus vidas para en función de este conocimiento organizar los temas de estudio y la forma de tratarlos. Si se califica la enseñanza primaria actual con los criterios que hemos mencionado, entonces sale reprobada, ya que ni hay transformación de la vida ni hay socialización de los conocimientos. Tomemos el ejemplo de las materias de Biología; en ellas se enseña que la causa de las enfermedades son los seres microscópicos que penetran a nuestro cuerpo por falta de higiene; es un hecho que estas enseñanzas modifican poco o nada los hábitos de los educandos y de sus familias, porque siguen ingiriendo alimentos sucios en las calles, de ahí que las enfermedades estomacales infecciosas ocupen los más altos índices de mortalidad infantil. ¿Por qué ocurre esto si hipotéticamente se les previene a los educandos en sus clases de este tipo de peligros? Porque, de acuerdo con lo criticado por el Doctor Mora, no se tiene el hábito de ligar lo que se enseña con lo que se vive, la práctica con la teoría. Y lo que decimos de la biología lo podríamos decir prácticamente de todas las materias que a nivel primario se imparten, ya que el pueblo sigue desarrollando su vida cotidiana sumergido en hábitos nefastos, enfrentando sus males reales o ficticios con supercherías: come alimentos infestados de microbios en la calle o en su casa, cree en brujerías, en males de ojo; nada sabe de la psicología infantil, de cómo debe dirigirse el desarrollo de los niños; se aturde con diversiones degradadas de la que los satura la televisión, oye música de un bajísimo nivel estético, no procura que los jóvenes vivan su sexualidad con naturalidad, etc. Si la educación primaria retornara a los principios educativos del Doctor Mora y del maestro Rafael Ramírez, tan esplendorosamente puestos en práctica en los mejores momentos de la educación rural, entonces la educación primaria se organizaría en función de la problemática concreta de todos los días y no en función de programas abstractos elaborados por individuos sentados atrás de un escritorio. Por ello, en la medida en que la educación no parta de las necesidades de la gente y obligue a los niños a engullir toneladas de datos y fechas que ni les van ni les vienen en su vida diaria (que memorizan para el examen para vomitarlos inmediatamente después) es que al final de esos largos años de estudio nada les quedará en su memoria ni en su comportamiento. Esto es normal,, es un principio de economía, finalmente cada quien guarda en el ropero o en la memoria solo lo que necesita, y tira a la basura o al olvido todo eso en lo cual no encuentra ni sentido ni utilidad.

## La cuarta transformación

Pero la historia prosigue, en el momento actual se ha propuesto la 4ª transformación en la educación particularmente en las etapas que preceden a los niveles superiores, y afortunadamente diferentes instituciones han sido invitadas a elaborar la nueva reforma educativa, entre ellas nuestra Institución y particularmente la Escuela Superior de Física y Matemáticas. El reto es muy grande pero tal vez la experiencia de las Escuelas Rurales pueda servir de orientación adoptando sus criterios básicos. La vida en nuestro país, y en general en todo el planeta, ha cambiado, los problemas cotidianos a nivel doméstico y a nivel urbano son parcialmente iguales a los del pasado, pero también hay otros problemas inéditos tales como los que derivan de la contaminación del medio ambiente con tóxicos y ruido, o el del calentamiento global con sus efectos cada vez más palpables. Y no solamente eso, sino que además de los cambios ambientales hay que considerar los cambios en la mentalidad de los niños con su apego a los juegos virtuales y el uso excesivo de los celulares. Este uso virtual de los objetos los niños lo prefieren al contacto directo con las cosas reales, lo cual, desde nuestro punto de vista atrofia su sentido de realidad, a diferencia de los juguetes antiguos con los cuales los niños ejercitaban sus sentidos con la manipulación de objetos reales. Este cambio de mentalidad merece un estudio profundo y debe ser tomado en cuenta a la hora de proponer los contenidos y las formas.

## Referencias

1) Dialéctica Liberal: José María Luis Mora, Ediciones del Partido Revolucionario Institucional, 1984-

2) Francisco Larroyo: Historia comparada de la Educación en México, Editorial Porrúa, 1947.

3) Robert J. Knowlton, Los bienes del clero y la Reforma mexicana, Editorial Fondo de Cultura Económica, 1985

[4] Guadalupe Monroy Huitron: Política educativa de la Revolución.

5) John A. Britton, Educación y Radicalismo en México I, Ed. Sep Setentas 287,1976.

6) John A. Britton, Educación y Radicalismo en México II, Ed. Sep Setentas 288,1976.

7) 3) Ignacio Manuel Altamirano, Escritos sobre educación, Editorial Consejo Nacional para la cultura y las artes, 1989.

8) Milada Bazant, Historia de la educación durante el porfiriato, Ediciones de El colegio de México, 1995.

9) Rafael Ramírez, La escuela Rural mexicana, Editorial SEP/80, 1882.

10) Rafael Ramírez, Obras completas, Ediciones del Gobierno del Estado de Veracruz, 1967.

11) Mary Kay Vaughmn, La política cultural de la Revolución, Editorial Fondo de Cultura Económica, 2001.

12) Susana Quintanilla y Mary Kay Vaughan, Escuela y sociedad en el período cardenista, Editorial Fondo de Cultura Económica, 1999

# Dificultades de aprendizaje en simulación de Montecarlo

Ramón Sebastián Salat Figols[68]
rsalat@esfm.ipn.mx

Investigación

Esta sección está dedicada a los trabajos de investigación en el área de la Didáctica de las Ciencias Experimentales y las Matemáticas.

## Resumen

El objetivo de este trabajo es encontrar dificultades importantes que tienen los estudiantes para el aprendizaje de la simulación de Montecarlo y proponer acciones para disminuir dichas dificultades. Se analizan los resultados obtenidos por los estudiantes de los cursos que se imparten en la Escuela Superior de Física y Matemáticas en la aplicación de exámenes escritos. Se encontró que los estudiantes tienen dificultades en la elaboración de algoritmos que permitan simular valores para una variable aleatoria y en el uso de conceptos de probabilidad para resolver problemas de simulación. En general, los estudiantes muestran dificultades en la solución de problemas.

## Palabras clave

Simulación de Montecarlo, solución de problemas, dificultades de aprendizaje.

## Introducción

Los inicios de la simulación se remontan a 1945 con la aparición de la primera computadora electrónica, ENIAC, para estudiar el problema de reacción en cadena de neutrones en procesos de fisión (Eckhardt, 1987). Actualmente la simulación de Montecarlo se utiliza para resolver problemas de diferentes tipos: por ejemplo, problemas de transporte bajo condiciones de incertidumbre de la demanda (Weltman, Tokar, 2019); problemas de líneas de espera y de inventarios; proyección de valores de activos financieros; cálculo de integrales múltiples.

La simulación de Montecarlo es un tema ineludible en los programas de varias carreras, porque en muchos casos, no es posible o demasiado costoso estudiar el comportamiento de modelos matemáticos para explicar y entender el mundo físico de manera analítica. Por otro lado, el aprendizaje de la simulación de Montecarlo contribuye a la integración del conocimiento en el estudiante, debido al uso intensivo que se hace de conceptos de probabilidad y estadística. Frecuentemente, las aplicaciones de la simulación de Montecarlo pretenden estimar el valor esperado de alguna variable aleatoria, pero el error de aproximación es de naturaleza probabilística. Por otro lado, la simulación de

[68] Escuela Superior de Física y Matemáticas

Montecarlo permite realizar pruebas de hipótesis, cuando es difícil obtener la distribución del estadístico utilizado.

El presente trabajo es una primera aproximación a la detección de dificultades mostradas por los estudiantes en el aprendizaje de la simulación de Montecarlo.

## Marco Teórico

Los resultados del aprendizaje, en este trabajo, se valúan mediante la aplicación de un examen que consiste en varios problemas. Por lo tanto, el primer asunto a considerar es qué se entiende por problema en matemáticas. Existen diferentes definiciones aportadas por varios autores (Hoossain, 2004). En este trabajo, se considera como problema a una situación en la que se desea llegar a una meta (solución) y que existe un cierto bloqueo para alcanzarla. La aplicación rutinaria de algún procedimiento no es realmente un problema, porque no existe bloqueo alguno. La realización de ejercicios por parte del alumno es importante porque contribuye a lograr que el estudiante se familiarice con los objetos matemáticos y con su manipulación. Pero evidentemente, la educación no puede limitarse a la realización de ejercicios, sino que tiene que ir más allá y favorecer la solución de problemas.

El tema de solución de problemas ha sido abordado por varios autores. Polya (Polya, 1965), señala cuatro etapas importantes en la solución de problemas: 1. Entender el problema. 2. Elaborar un plan. 3. Ejecutar el plan. Y 4. Mirar hacia atrás. En su libro, Polya presenta varios ejemplos en los que se ilustra el seguimiento de los cuatro pasos, con sugerencias de preguntas que pueden ayudar en cada una de ellas.

Schoenfeld (Schoenfeld, 2013), reflexiona sobre su planteamiento original (Schoenfeld, 1985) acerca del tema solución de problemas en matemáticas. En primer lugar, establece que por solución de problemas se entiende el intento de alcanzar un resultado cuando no se conoce un método para alcanzarlo. En seguida establece que existen cuatro categorías de actividad que son necesarias y suficientes para explicar el éxito o fracaso al intentar obtener la solución: el conocimiento disponible, uso de estrategias heurísticas, mecanismos de autorregulación y el sistema individual de creencias.

Además de considerar aspectos generales a la solución de problemas en matemáticas, hay que tomar en cuenta aspectos específicos de la enseñanza de la simulación. En muchos casos, el propósito de realizar una simulación es la de estimar el valor esperado de una variable aleatoria. Además de los conocimientos básicos de probabilidad y estadística, en simulación, se requiere conocer métodos para simular variables aleatorias que pueden seguir diferentes distribuciones. Por otro lado, el carácter de la aproximación es de naturaleza probabilística. Otro aspecto importante es la capacidad para elaborar algoritmos específicos para simular valores de variables aleatorias y escribir el código del algoritmo en algún lenguaje de programación. Las habilidades que el estudiante tiene en solución de problemas, afectan su desempeño en la programación en computadora (Kozuh, Krajnc, Hadjileontiadis, Debev, 2018).

Las dificultades en la programación se relacionan con la posibilidad de analizar lo que ocurre en la memoria durante la ejecución de un programa (Milne, Rowe, 2002), es decir, se relacionan con la capacidad del estudiante de crearse un modelo mental de la ejecución de un programa.

## Metodología

El estudio se realizó sobre los grupos de Simulación I y Simulación II, de séptimo y octavo semestres respectivamente, de la Licenciatura en Ingeniería Matemática, que se imparte en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional. Ambos cursos se imparten en tres sesiones semanales de una hora y media cada una de ellas, de las cuales, una a la semana se desarrolla en el laboratorio de cómputo; en estas sesiones se proponen problemas a los estudiantes y se les conduce hacia su solución en función del nivel de avance que muestren.

La evaluación de los resultados se efectuó mediante el análisis de exámenes escritos. Se empleó la técnica de “clustering” (Salat, 2019).
A continuación, se muestran los tres exámenes escritos analizados en este trabajo.

Examen 1.

1. a) Estime por simulación, la integral $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx$ **.** b) Estimar el número de simulaciones necesarias para que la probabilidad de cometer un error mayor que 0.01 sea menor que 0.1**.** c) Use la técnica de variables antitéticas para reducir la varianza. ¿En qué porcentaje se redujo la varianza?
2. Considere la variable aleatoria $X = Min\,\{n|U_1 + U_2 + \cdots + U_n > 1\}$ donde $U_1, U_2$ , ... son variables aleatorias independientes uniformemente distribuidas en $[0,1]$ . a) Estime por simulación el valor esperado de X. b) Use la técnica de variables antitéticas para reducir la varianza. ¿En qué porcentaje se redujo la varianza?

El reactivo 1 en realidad es un ejercicio, en cambio el reactivo 2 puede considerarse como un problema. Esta diferenciación se sustenta en el hecho de que se habían resuelto ejercicios similares al reactivo 1, mientras que el reactivo 2 requiere del diseño y codificación de un programa que sea capaz de simular valores para la variable $X$ y contiene una aplicación no trivial del método de variables antitéticas.

Examen 2.

1. Considere la integral $\int_0^1 f(x)dx$ donde $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & si\ x \leq 1/2 \\ \frac{1}{x} & si\ x > 1/2 \end{cases}$. A) Estime por simulación el valor de la integral. B) ¿Cuántas simulaciones debe realizar para que la probabilidad de cometer un error mayor que 0.01 sea menor que 0.1, en la estimación de la integral? C) Utilice la técnica de variables antitéticas para reducir la varianza. ¿En qué porcentaje se redujo la varianza?
2. Considere la variable aleatoria $M = Mín\,\{n\epsilon N \mid U_{n+1} > U_n\}$ donde $U_1, U_2, U_3, ...$ son variables aleatorias uniformemente distribuidas en $[0,1]$ e independientes. A) Estime por simulación el valor esperado de $M$. B) Utilice a la variable aleatoria $Y = U_1 + U_2 + \cdots + U_M$ como variable de control para reducir la varianza en la estimación del valor esperado de $M$. ¿En qué porcentaje se redujo la varianza? (Observe que $Y$ está definida en términos de $M$).

Examen 3.

1. Considere una línea de espera de un solo servidor del tipo "primero en llegar, primero en salir", en la que los usuarios llegan siguiendo un proceso de Poisson con parámetro 2 usuarios/min. y en la que los tiempos de atención a los usuarios siguen una distribución exponencial con parámetro 1.5 usuarios/min. A) Estime por simulación, el valor esperado del número de personas en T=25 min. B) ¿Cuántas veces tiene que repetir la simulación de la línea de espera para asegurar que la probabilidad de cometer un error menor que 0.1 sea mayor que 0.9? C) Utilice a la variable máximo número de personas (en el intervalo [0,25]). ¿En qué porcentaje se redujo la varianza?
2. Considere el conjunto de números $A = \{1, 2,3,4,5,6,7,8,9\}$. La variable aleatoria $X$ se define como la suma de los elementos de un conjunto de 4 elementos seleccionados aleatoriamente de $A$ sin reemplazo. Estime por simulación la probabilidad de que $X$ sea mayor que 16.
3. En una carretera los vehículos pasan por un punto en el que está en la orilla un peatón, siguiendo un proceso de Poisson con parámetro $5\,\frac{vehículos}{min}$. El peatón necesita $1/2\ min$. para cruzar con seguridad. Estime por simulación el valor esperado del número de vehículos que tiene que dejar pasar antes de poder cruzar.

## Resultados

En la tabla I se muestran los resultados obtenidos en el examen 1. Las respuestas se codifican con 1 o 0, según el estudiante responda correctamente o no cada reactivo. La última fila contiene el número de respuestas correctas a cada reactivo y la columna a la derecha, contiene las frecuencias absolutas de cada tipo de respuesta.

Tabla I. Resultados del primer examen.

| Problema 1 | | | Problema 2 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | b | C | a | b | Frecuencia |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 17 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 8 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 12 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 3 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 41 | 40 | 41 | 20 | 16 | 41 |

Los incisos a y c del reactivo 1 los pudieron resolver correctamente todos los estudiantes, mientras que el inciso b, solamente un estudiante falló.
Al realizar un "clustering" sobre los reactivos se obtuvo el siguiente dendograma:

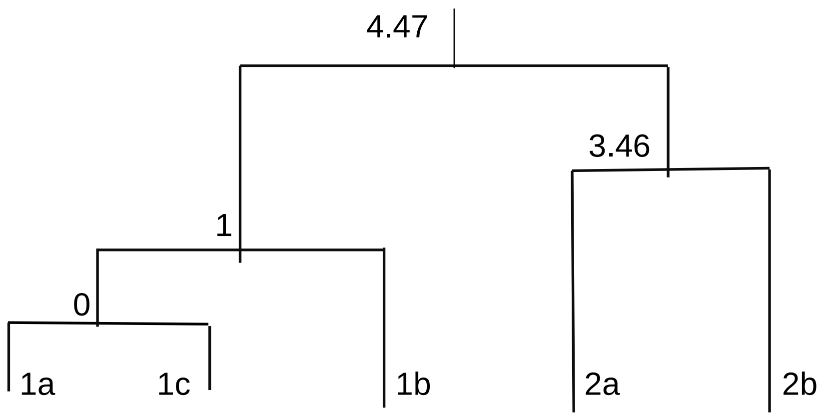



Figura 1. Instrumentos de medición que se utilizarán en la actividad 1.

Un agrupamiento obtenido para los reactivos es {1a, 1b, 1c}, {2a} y {2b}. El primer grupo corresponde a reactivos que pueden considerarse ejercicios, mientras que los otros dos, corresponden a problemas. Es decir, el agrupamiento encontrado es consistente con la diferenciación previa que se hace entre ejercicio y problema.

En el análisis de los resultados del segundo y tercer examen, también se utilizó la técnica de agrupamiento, y en ambos, se obtuvo también congruencia en cuanto a la separación de ejercicios y problemas. Sin embargo, no se mostrarán los dendogramas correspondientes.

Como es de esperarse, los estudiantes tuvieron una dificultad significativamente mayor para resolver los problemas. Una dificultad encontrada en el reactivo 2a con frecuencia es que el estudiante construyó un algoritmo que no corresponde a la simulación de la variable aleatoria $X$, (ver Figura 2). En el caso mostrado en la Figura 2 se observa que el error consiste en que hay que generar valores para U hasta que la suma sea mayor que 1, lo cual no se asegura generando 100 valores.

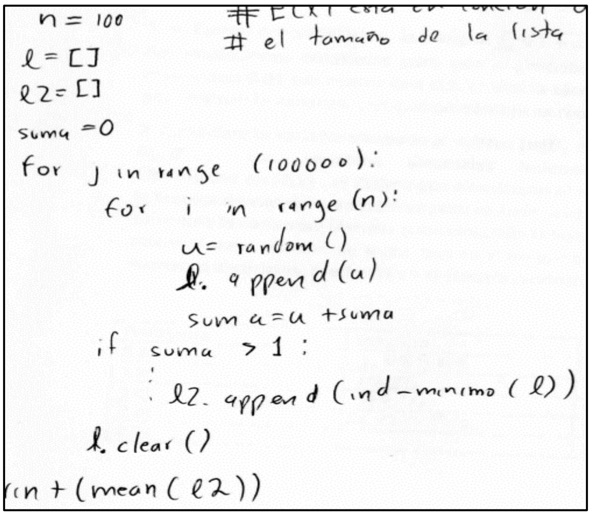


Figura 2. El algoritmo no corresponde con el cálculo de la variable.

En el caso de la Figura 3, el algoritmo es correcto, pero el valor que regresa la función no corresponde a la variable $X$, sino a la variable suma de los valores de los U.

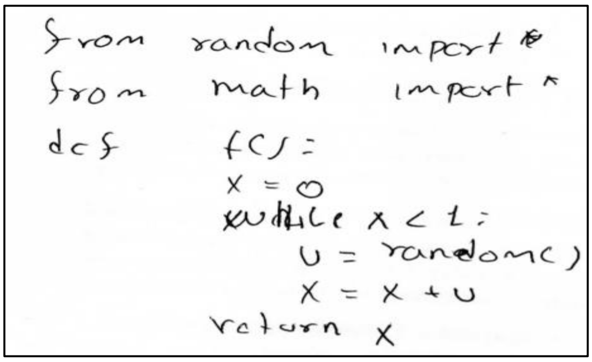



Figura 3. El valor que regresa la función, no corresponde al valor de $X$.

Los resultados obtenidos en el examen 2 se muestran en la tabla II. Como puede observarse de esta tabla, el problema 1, que en realidad es un ejercicio no representó mayor dificultad para los alumnos. Pero el inciso a del problema 2, solamente 5 de 37 estudiantes pudieron resolverlo, mientras que el inciso b, nadie pudo resolverlo.

Tabla II. Resultados del segundo examen.

| Problema 1 | | | Problema 2 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | b | c | a | B | |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 31 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 5 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 37 | 36 | 36 | 5 | 0 | 37 |

Respecto al inciso a del problema 2, la dificultad mostrada por los estudiantes, nuevamente, fue la dificultad para elaborar un algoritmo para simular valores para la variable aleatoria $M$. En algunos casos, el algoritmo planteado es incorrecto Figura 4.

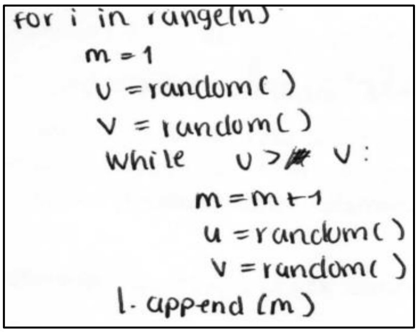



Figura 4. Algoritmo incorrecto para generar $M$.

Examen 3.

Tabla III. Resultados del tercer examen.

| Problema 1 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | b | c | Problema 2 | Problema 3 | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 3 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 17 | 6 | 12 | 5 | 14 | 20 |

Los estudiantes sabían cómo estimar el número de simulaciones necesarias para asegurar que la probabilidad de cometer un error mayor o igual que cierto valor fuera menor que una probabilidad dada. Pero, en el caso del inciso b del problema 1, se pregunta por el número de simulaciones para asegurar que la probabilidad de que el error fuera menor o igual que cierto valor sea mayor que una probabilidad dada; para lograr el resultado es necesario utilizar conceptos de probabilidad y de desigualdades, bien conocidos por los estudiantes, sin embargo, solamente 6 de 20, lograron el resultado.

En el problema 2, algunos estudiantes no conocían el término “sin reemplazo”. El error cometido con más frecuencia fue el de resolver el problema asumiendo “con reemplazo”.

Ningún estudiante utilizó la función “sample”, que era la apropiada al caso; hay que considerar que tenían acceso a la ayuda de Python, en donde aparece la función requerida.

Se observa que el problema 3, lograron resolverlo 14 de 20 estudiantes. Estos 14 estudiantes supieron decidir qué tenían que hacer y construir correctamente el algoritmo requerido. Es decir, muchos estudiantes lograron darse cuenta de que el modelo de procesos de Poisson era el apropiado para resolver el problema; además fueron capaces de diseñar el algoritmo correspondiente.

## Conclusiones

Los estudiantes no tuvieron problemas en resolver los ejercicios. Pero respecto a los problemas, las dificultades observadas fueron las siguientes:

1. Dificultades al diseñar un algoritmo que sirva para simular valores para alguna variable aleatoria. El nivel de la dificultad depende de la complejidad de la definición de la variable aleatoria.

2. Dificultad en utilizar conceptos de probabilidad, necesarios para resolver un problema. En ocasiones, esta dificultad tiene que ver con el desconocimiento de algún concepto, por ejemplo, “sin reemplazo”.

3. Muchos estudiantes fueron capaces de descubrir el modelo apropiado para la solución de un problema.

Los resultados obtenidos apuntan hacia la necesidad de hacer mayor énfasis en la solución de problemas durante el desarrollo del curso, en especial, en la elaboración de algoritmos para simular valores de variables aleatorias.

También es necesario evaluar más ampliamente la capacidad de los estudiantes para diseñar algoritmos necesarios para resolver problemas, cuya solución involucre la simulación con avance sobre eventos discretos.

## Referencias

Eckhardt, R. (1987). Stan Ulam, John Von Neumann, and the Monte Carlo Method. *Los Alamos Special Issue*, 131-143.

Hoossain, E. (2004). “What Are Mathematical Problem”, *Humanistic Mathematics Network* Journal, 27(12), 1-8. Recuperado el 10 de diciembre 2019: https://scholarship.claremont.edu/hmnj/.

Kozuh, I., Krajnc R., Hadjileontiadis L.J. & Debevc M. (2018) Assessment of problem solving ability in novice programmers. *PLoS ONE 13(9): e0201919*. Recuperado el 6 de enero de 2020: https://doi.org/10.1371/journal.pone.0201919.

Polya, J (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas.

Salat, R.S. (2019). Una metodología para la utilización de la evaluación en la dirección del proceso de aprendizaje de los estudiantes, *Jornadas Académicas de Didáctica de las Ciencias 2019*, Ciudad de México, Escuela Superior de Física y Matemáticas, 225-231.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical problema solving.* Orlando, FL: Academic Press.

Schoenfeld, A.H. (2013). Reflections on Problem Solving Theory and Practice, *The Mathematics Enthusiast, (10)1,* 9-34.

Weltman, D. y Tokar, T. (2019). Using a Monte Carlo Simulation Exercise to Teach Principles of Distribution: An Enhanced Version of the Classic Transportation Problem. *INFORMS Transactions on Education, 19(3)*, 111-120.

# Programa STEAM[69] para motivar la curiosidad científica

Julián Félix[70] Waleska Aldana[71],
felix@fisica.ugto.mx, waldanasegura@gmail.com

Resumen

Se presenta un programa innovador de Aprendizaje de Ciencias binacional, impactando a más de 5,000 personas en 24 meses. Más de 10 años de colaboración entre la Universidad de Guanajuato y la Universidad de San Carlos de Guatemala. Se presentan actividades en Ciencias, Tecnología, Ingeniería, Artes y Matemáticas con el objetivo de mejorar el aprendizaje de las ciencias y promover el interés en jóvenes utilizando el método científico. El programa provee actividades donde jóvenes participan motivándose a continuar sus estudios.

Se usa la metodología científica y los estudiantes aprenden interrelacionándose con roles positivos, con actividades interactivas, empoderándose de su aprendizaje en una estrategia multinivel, motivando su curiosidad científica.

**Palabras claves**

STEAM, Educación, Ciencias, Tecnología.

## Introducción

El programa STEAM (Science, Technology, Engineering, Arts and Mathematics) nace como una evolución del mejoramiento de las ciencias experimentales y su seguimiento en la Escuela de Formación de Profesores EFPEM de la Universidad de San Carlos de Guatemala, con apoyo de la Universidad de Guanajuato por medio de una colaboración de más de 10 años.

Este programa tiene su fundamento en la metodología científica, la que permite fomentar la curiosidad científica y realizar un abordaje adecuado y sistemático de las temáticas de manea que sean útiles a los estudiantes a lo largo de su vida, creando competencias, habilidades y destrezas en los mismos. La intencionalidad del programa ha sido elevar el nivel educativo a través de una educación científica de calidad, con un programa no escolarizado que permite la continuidad del mismo a lo largo de la vida. El programa interseca con los programas escolarizados al proveer actividades dentro de las instituciones educativas, y promueve sanos intercambios de ideas y conocimientos con

[69] Science, Technology, Engineering, Arts and Mathematics. Siglas en inglés.
[70] Laboratorio de Partículas Elementales, DCI, CL, Universidad de Guanajuato. Egresado del IPN CINVESTAV. https://laboratoriodeparticulaselementales.blogspot.com/
https://laboratoriointernacionaldeparticulaselementales.net/
[71] EFPEM, Universidad de San Carlos de Guatemala.

Expertos, para promover roles positivos con que los jóvenes puedan identificarse.

La estrategia se presenta como una intervención multinivel, gradada y adecuada a cada edad y etapa de aprendizaje. Las actividades se realizan con materiales de bajo costo para mantener la accesibilidad y fomentar que los estudiantes elaboren prototipos que al tener sus observaciones y conclusiones puedan modificar por sí mismos a la luz de sus resultados.

Se propicia además de un aprendizaje significativo, un aprendizaje colaborativo y en comunidad, dado que las actividades incluyen conferencias de público en general, para actualización y divulgación. Esto permite generar sinergias positivas en las comunidades alrededor de la temática y un aprendizaje a lo largo de la vida.

Se presentan resultados de este programa que ha alcanzado dimensión geográfica a nivel nacional. Más de 5,000 jóvenes y alrededor de 1,000 maestros han sido beneficiados de una estrategia multinivel que propicia la curiosidad científica y la continuación de los estudios en ciencias por parte de los estudiantes involucrados.

## Marco Teórico

Aunque no es nuevo, los últimos años han dado un auge al enfoque experimental basado en las ciencias experimentales. Y su relación con las artes. (Pomeroy, 2012) Morín ha descrito el conocimiento científico con el fin último de ordenar la realidad y en la complejidad encontrar la simplicidad, darles el orden a los conceptos, para encontrar el orden y la simplicidad a la que obedecen.(Morin, 1997).
El aprendizaje científico se basa por excelencia, en el método científico, el cual se fundamenta en la observación y la experimentación. La observación nos lleva a fomentar la curiosidad científica, las observaciones controladas en un espacio adecuado llevan a una experimentación sistemática que produce resultados reproducibles. Con estos resultados se crean hipótesis de trabajo que van generando resultados de investigación. Se formulan preguntas y se encuentran respuestas.

En este tiempo, la pedagogía ha pasado por diversas etapas de experimentaciones y modificaciones. Las diversas pedagogías han provisto resultados positivos y negativos en su implementación, la dificultad de evaluar pedagogías es que sus resultados son de largo plazo, evaluables en generaciones y mínimamente se pueden ver resultados luego de 2 o 3 años, y los resultados palpables se ven en generaciones. Esto dificulta los ajustes de implementación en cada intervención porque cada ajuste se realiza cuando los sujetos han cambiado y las generaciones han cambiado totalmente las condiciones iniciales.

Las estrategias de aprendizaje, aunque son dinámicas, deben tener la adaptabilidad y universalidad necesaria que permita a los estudiantes adaptarse y aprender de manera significativa (Díaz Barriga Arceo & Hernández Roja, 1999), sin perder de vista la importancia de considerar los contextos particulares de los estudiantes. Esto requiere ajustes finos que se realizan periódicamente, pero con visión de largo plazo.

Una visión prospectiva en todo momento contribuye al logro de los objetivos. Siendo los sujetos de investigación humanos, se consideran las particularidades de cada comunidad y entorno, que influyen en el aprendizaje como medios y limitantes.

Dentro de las ventajas de una estrategia STEAM, se considera la formación de competencias y pensamiento crítico. Competencias que son útiles a lo largo de la vida (Henriksen, 2014). El incremento de este tipo de estrategias, reconoce que los empleos en carreras relacionadas a STEAM son mejor retribuidos en el largo plazo y estas carreras logran mantener a los jóvenes alejados de situaciones de vulnerabilidad, impactando positivamente en sus comunidades a través de buscar soluciones científico-tecnológicas a las problemáticas diarias.

Una educación basada en estas metodologías, (Lopez-Gonzalez, 2018) genera sinergias importantes para reducir la brecha de género y generacional. Invertir en la educación de niñas promueve el desarrollo de las comunidades (SEGEPLAN (Secretaría de Planificación y Programación de la Presidencia - GT), 2010), cuando esta educación se enfoca en ciencias y utiliza de catalizador las artes se asegura el éxito de las intervenciones con una apropiada contextualización, que promueve aprendizajes significativos y adquisición de competencias y habilidades de largo plazo.

## Metodología

Durante los últimos 10 años se ha realizado un seguimiento de egresados de los programas de Licenciatura en la Enseñanza de la Física y Matemática en la Escuela de Formación de Profesores de Enseñanza Media -EFPEM- de la Universidad de San Carlos de Guatemala, para establecer el posible impacto de intervenciones novedosas en los docentes, y finalmente en el sistema educativo nacional a través de los docentes en servicio.

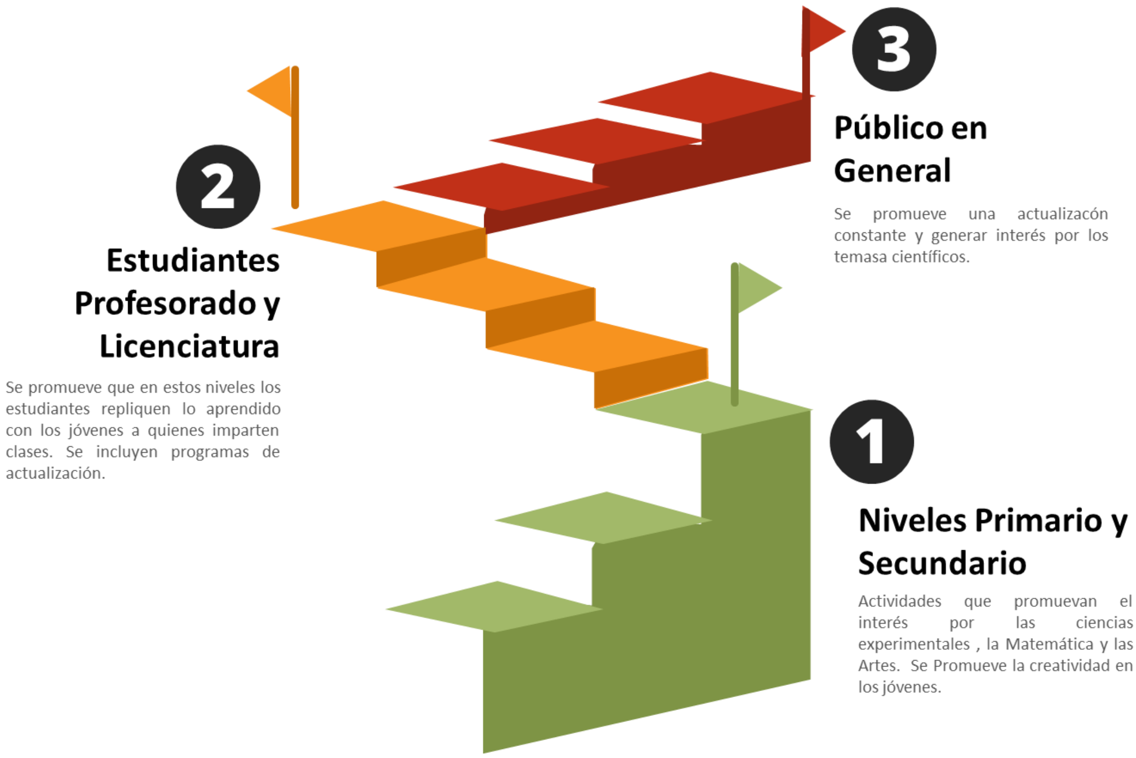
EFPEM cuenta con alrededor de 4,000 estudiantes activos en los diversos programas de Profesorado y Licenciatura en el nivel central y más de 4,000 estudiantes matriculados en los programas externos como el programa de Profesionalización Docente PADEP/D.

A partir del año 2017, en EFPEM se crea un programa innovador producto de las intervenciones anteriores, con miras a fortalecer el marco de estrategias STEAM como estrategia transversal a los programas y que permita la actualización tanto de estudiantes de la EFPEM, docentes en servicio, como estudiantes de secundaria. Este programa inicia actividades y se diseña para motivar a los participantes en todos los niveles a través de actividades de bajo costo, replicables en cualquier entorno, contextualizadas al medio nacional y que puedan explicar con elementos sencillos los temas del contenido del Currículo Nacional Base (CNB) aprobado por el Ministerio de Educación (MINEDUC, 2018).

En ese sentido, la estrategia planteada se convierte en una estrategia multinivel, con estudiantes y docentes interactuando libremente en un entorno controlado para verificar el avance de las intervenciones.

Se busca promover el interés en los jóvenes desde tempranas edades, donde el programa ha iniciado actividades en nivel primario, y dar acompañamiento hasta los niveles superiores para mantener el interés y la calidad de los contenidos.

Ilustración 1 Estrategia multinivel (elaboración Propia)




Actualmente se trabaja una plataforma informática para proveer un espacio digital de aprendizaje adicional a los espacios interactivos presenciales que se presentan en el programa y que permitan reforzar los conocimientos aprendidos, convirtiéndose en parte de la comunidad de aprendizaje en entornos virtuales.

De esta manera, se busca que todos los entornos de aprendizaje, familia, comunidad, escuela, compartan los conocimientos y puedan interactuar efectivamente en la estrategia STEAM.

Ilustración 3 Participantes de STEAM Conference

Las estrategias STEAM fomentan la investigación, comunicación y curiosidad científica. Desde una estrategia multinivel, los estudiantes se empoderan de su propio aprendizaje desde los niveles más bajos del sistema educativo que incluye diversas entre las que se encuentran:

### Niveles Pre Primario y Primario

Se incluyen Actividades Interactivas de aprendizaje gradadas de acuerdo con su nivel de conocimiento. Se incluyen conocimientos básicos del Universo y se introducen los conceptos básicos de Ciencia, gradualmente, entre otras, éstas:

a. Introducción a la Astronomía observacional. Crea tu constelación a elaborar con materiales reciclables.
b. Introducción al método científico: Avioncitos de Papel: construcción de aviones de papel para conocer el método científico.

### Niveles Secundario

Se incluyen actividades que introduzcan conceptos que interrelacionen las ciencias, entre otras, éstas:

a. Interrelación entre las ciencias. Circuitos eléctricos de plastilina. Elaborar masas conductoras y no conductoras. Requiere conocer conceptos de química y física.

b. Conceptos del vuelo y tiro parabólico. Construcción de cohetes con agua y aire. Construcción de cohetes de papel. Requiere conceptos de tiro parabólico.

c. Introducción a la robótica y el arte. Robot pintor: se construyen con motores y marcadores, pequeños dispositivos que pueden realizar dibujos por sí mismos. Robot gusano. Con paletas y motores se diseñan pequeños dispositivos capaces de caminar por sí mismos. Se enseñan principios de mecánica y circuitos.

d. Introducción al método científico y la investigación: avioncitos de papel avanzado: Se profundiza sobre los conceptos del vuelo y la metodología científica en la investigación.

## Nivel Superior

En el nivel superior, los estudiantes escogen un proyecto de investigación que usualmente presentan como seminario o durante los Veranos de la Ciencia en la Universidad de Guanajuato (Felix, n.d.), donde se han elaborado algunos materiales como videos o presentaciones en extenso (Guanajuato, n.d.).

Ilustración 1 Estudiantes durante el Verano de la Ciencia en la Universidad de Guanajuato (Foto J. Félix).

**Además, se complementan las actividades con conferencias lideradas por estudiantes, donde se empoderan del aprendizaje, denominadas STEAM Conference, y conferencias de expertos, donde se abordan temas de interés.**

## Conferencia con expertos

La finalidad de estas actividades es promover roles positivos que los jóvenes y estudiantes puedan reconocer, seguir y contactar. Se promueve buscar figuras nacionales e internacionales que hayan sido exitosos en sus campos de aplicación, pero, además, que se pueda tener una interacción con jóvenes para motivarlos. En ese sentido han participado del programa.

Dentro de los Expertos invitados, se busca que puedan motivar a los jóvenes con temáticas de impacto y alto contenido científico. Entre los invitados se encuentran:

a. Julián Félix, Universidad de Guanajuato y Fermi National Accelerator Laboratory.
b. Fernando Quevedo, International Centre for Theoretical Physics ICTP y Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, DAMTP Cambridge, UK.
c. Don Lincoln, Fermi National Accelerator Laboratory (presentará en 2020).
d. Javier Santaolalla, CERN.
e. Adriana O Campo, NASA.
f. Luis Von Ahn, Duolingo, Carnegie Mellon USA.
g. Pamela Pemmington, Universidad del Valle de Guatemala.

## STEAM Conference Guatemala

STEAM Conference Guatemala se diseñó como una evolución natural a los talleres con jóvenes que se desarrollan desde el año 2010. En esta conferencia, se promueve que los talleres sean impartidos por jóvenes, quienes entregan el contenido a los jóvenes participantes, docentes y público en general. Esto, además de promover un amplio sentido de autoestima y realización en los jóvenes, les permite desarrollar otras habilidades de comunicación efectiva. La interacción entre jóvenes hace que los talleres sean exitosos y que los jóvenes puedan sentirse más cómodos a la hora de la interacción, eliminando de esta manera barreras de aprendizaje.

Precisamente, para eliminar barreras de aprendizaje, la conferencia entrega a los participantes todos los materiales necesarios, incluye además almuerzo y refrigerio y se mantiene de manera gratuita para promover el acceso de personas de bajos recursos. Las actividades incluyen talleres que involucren temas de electrónica, robótica, mecánica, hidráulica, termodinámica, astronomía, química, música, pintura, matemáticas, resistencia de materiales, y otros; de manera que se interrelacionen entre sí durante cada presentación.

## Diplomados y Cursos

Dentro de la estrategia, el fortalecimiento y profesionalización de los docentes en servicio es un pilar fundamental para el éxito de largo plazo. Se han promovido Diplomados en Robótica, contando con 3 módulos que pueden tomarse en cualquier momento o por separado a conveniencia del participante siendo éstos: Mecánica, Electrónica Básica y Programación Básica. Debido a los diversos entornos de los participantes se busca que el diplomado sea accesible, de bajo costo y amigable para todos los participantes.

Se han fomentado, además, alianzas con otras instituciones como la Asociación Guatemalteca de Astronomía, para el curso de Introducción a la Astronomía; y el Laboratorio Internacional de Partículas Elementales[72] de la Universidad de Guanajuato, para los cursos de Introducción a la Mecánica cuántica, y Electricidad y Magnetismo.

## Talleres interactivos

Los talleres interactivos buscan motivar a los estudiantes a desarrollar habilidades y destrezas que en una metodología pasiva no adquieren. La interacción desarrolla habilidades comunicacionales, y el elaborar prototipos de bajo costo fomenta la creatividad para solventar problemas cotidianos, por medio de la correcta aplicación de principios basados en un método científico, que les permita organizar la información; y a partir de la experimentación adquirir datos y ser capaces de analizar los mismos y llegar a conclusiones.

En los talleres se promueve que los jóvenes elaboren prototipos y los modifiquen de acuerdo con sus resultados. Cada estudiante cuenta con su material de trabajo, eliminando los modelos conductistas y la receptividad pasiva que caracteriza los modelos tradicionales de aprendizaje.

Se cuenta con una escuela que sirve para monitorear el avance de la intervención. Se utiliza una sección de control a la cual no se le imparten talleres ni participa de las actividades del programa STEAM. Y otras 3 secciones donde se interviene con talleres, conferencias y se invita a los jóvenes a participar activamente.

Se complementan con Ferias Científicas, días de Ciencias y otras actividades donde se muestran los resultados de los talleres semestralmente.

## Interacción de las ciencias y las Artes

Así mismo se realizan conferencias de Divulgación Científica y de interrelación entre las Ciencias y las Artes. El Dr. Julián Félix ha creado el Concierto Conferencia “La Física de la Música”, como una estrategia de transitar entre las ciencias y las artes. Este Concierto conferencia se ha presentado exitosamente en México, Guatemala, Buenos Aires y próximamente se presentará en Estados Unidos.

Esta actividad promueve mostrar el fundamento científico y la estrecha relación de una actividad humana por excelencia, la sensibilidad humana a la música. La interacción se realiza entre estudiantes de escuelas de música, músicos

[72] http://laboratoriodeparticulaselementales.blogspot.com
Http://laboratoriointernacionaldeparticulaselementales.net

profesionales o estudiantes de secundaria pertenecientes a los grupos escolares. La presentación se realiza de forma interactiva entre el expositor y los músicos. Durante la misma, se pretende ilustrar los contenidos, a la vez que se realiza una reflexión sobre la interacción de las ciencias y las artes.

**Ilustración 2 Conferencia Realizada en la Universidad de Guanajuato sobre la Física, la Música y el Cerebro, (foto ("La Física de la Música y el Cerebro," 2019)).**

## Resultados

Después de 2 años de intervención intensiva en el Programa STEAM, los jóvenes muestran un mayor interés en carreras de orientación científica, 17% más según los resultados del seguimiento de los estudiantes a quienes se invita a participar de los talleres interactivos. También se ha evidenciado un mejor rendimiento en los estudiantes que participan de las actividades STEAM, aproximadamente un 20% más. Estos datos se obtuvieron de las pruebas estandarizadas que realiza el Ministerio de Educación (MINEDUC) con respecto al año anterior.

De 120 jóvenes que participaron como conferencistas en STEAM Conference Guatemala, 20 estudiantes permanecen con el interés de impartir talleres, aunque ya terminaron el ciclo básico, 40 jóvenes quieren continuar la actividad dos años después, con la experiencia obtenida y la intencionalidad de replicar conocimientos mientras adquieren nuevos conocimientos y habilidades.

En STEAM Conference Guatemala han participado más de 80 instituciones a Nivel Nacional, la intervención rebasa el nivel central constituyéndose en un modelo exitoso de intervención.

Las conferencias de expertos promueven un sano intercambio entre estudiantes, docentes e investigadores. Producto de estas conferencias, 4 estudiantes han buscado oportunidades de beca de intercambio en el Laboratorio Internacional de Partículas Elementales, en total 4 estudiantes se encuentran en el proceso de inscripción a los programas de postgrado y grado en el extranjero.

Al menos un 40% de los profesores que han participado en el programa, han modificado su práctica docente e implementado activamente la metodología

STEAM. Esto permite, en el largo plazo, considerar un impacto positivo, en un esquema piramidal de las intervenciones.

Evaluar el impacto final de las intervenciones es difícil ya que es necesario evaluarlo en base a los resultados durante generaciones. La implementación metodológica interactiva se ha transformado en un programa completo de formación continua que pretende educar para la vida, por medio del desarrollo de competencias, habilidades y destrezas que permitan a los estudiantes adquirir el pensamiento crítico que les asegure un éxito futuro en su desarrollo profesional.

El programa se desarrolla en diversos entornos socioeconómicos, dando como resultado una diversidad de condiciones de vida de los estudiantes. En las intervenciones nos hemos enfocado en beneficiar al mayor número posible de estudiantes de bajos recursos, pero se pretende a la vez considerar las falencias del sistema y trabajar con todos los entornos educativos, de todos los orígenes y estratos sociales. Esto elimina barreras y permite un sano intercambio de ideas entre los jóvenes, al no hacer distinciones por el origen o condición social.

**Tabla 1 Intervenciones y participantes del programa STEAM (elaboración propia).**

| Nivel, audiencia. | Actividades | Participantes a la fecha | Origen Geográfico |
|---|---|---|---|
| Secundario | Conferencias con Expertos | 750 | Departamento de Guatemala, Quetzaltenango, Sacatepéquez |
| | Steam Conference | 4500 | Nivel Nacional |
| | Talleres en los Institutos ITC, Colegio Famore. | 850 | Departamento de Guatemala |
| Licenciatura y Profesorado | Conferencias con expertos | 800 | Nivel nacional, mayoritaria participación de departamento Guatemala, Quetzaltenango y Sacatepéquez. |
| | STEAM Conference | 650 | Nivel nacional |
| | Talleres | 700 | Colegios Capouilliez, Famore, Fundación DAR, Colegio Americano, ITC, |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | Colegio Príncipe de Asturias |
| Abierto al público en General | Diplomados en Robótica | 600 | Dividido en tres módulos, Departamento de Guatemala, desde nivel secundario hasta universitario de varias instituciones. |

Además, se han publicado 8 artículos de investigación y divulgación sobre el programa y se ha presentado en conferencias internacionales como Virtual Educa, Reimagine Education, CIEDUC UNESCO y otras.

## Conclusiones

La propuesta efectivamente motiva a los estudiantes a través de la curiosidad científica, promoviendo que continúen sus estudios en carreras en Ciencias, como se muestra en los resultados, y permanecer en el Programa STEAM.

Esta propuesta ha tenido un alcance a nivel nacional. Durante 24 meses de implementación en esta etapa, ha alcanzado a más de 5,000 jóvenes de los diversos estratos socioeconómicos y a nivel nacional y provenientes de más de 80 instituciones educativas. Esto promueve un sano intercambio entre jóvenes y una interacción con expertos, quienes encuentran en los conferencistas modelos positivos a quienes seguir que constituyen una influencia positiva para ellos.

Durante el seguimiento, se ha constatado que la práctica docente se ve influida positivamente en los maestros que participan del programa. Modifican su práctica docente, alejándose de las prácticas tradicionales y optando por un modelo inclusivo y participativo.

El programa STEAM ha mostrado ser exitoso en promover en los jóvenes la curiosidad científica y el deseo de continuar sus estudios en carreras relacionadas a los campos de STEAM. En ese sentido, el programa inicia una etapa de movilidad estudiantil por medio de la relación entre la Universidad de San Carlos de Guatemala y la Universidad de Guanajuato.

## Referencias

Díaz Barriga Arceo, F., & Hernández Roja, G. (1999). Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. In *Diplomado en Informática para la enseñanza de la medicina.* (pp. 80–112).

Felix, J. (n.d.). Verano de la Ciencia UG LIPE. Retrieved from https://julianfelixvaldez.wordpress.com/2019/07/16/veranos-de-la-ciencia-ug-laboratorio-avanzado/

Guanajuato, U. de. (n.d.). Veranos de la ciencia Universidad de Guanajuato. Retrieved from https://www.facebook.com/veranosUG.oficial/

Henriksen, D. (2014). Full STEAM Ahead: Creativity in Excellent STEM Teaching Practices. *STEAM*. https://doi.org/10.5642/steam.20140102.15

La Física de la Música y el Cerebro. (2019). Retrieved from https://www.ruletarusa.mx/prensa/musica-y-cerebro-en-la-ug/

Lopez-Gonzalez, M. (2018). For female leaders of tomorrow: Cultivate an interdisciplinary mindset. In *2017 IEEE Women in Engineering (WIE) Forum USA East*. https://doi.org/10.1109/WIE.2017.8285606

MINEDUC. (2018). Bases Curriculares Primero a Sexto Básico. In *Bases Curriculares Primero a Sexto básico*.

Morin, E. (1997). Introducción al pensamiento complejo. *Valladolid*, 84. Retrieved from http://www.pensamientocomplejo.com.ar/docs/files/MorinEdgar_Introduccion-al-pensamiento-complejo_Parte1.pdf

Pomeroy, S. R. (2012). From STEM to STEAM: Science and Art go Hand in Hand. *Scientific American*. Retrieved from https://blogs.scientificamerican.com/guest-blog/from-stem-to-steam-science-and-the-arts-go-hand-in-hand/

SEGEPLAN (Secretaría de Planificación y Programación de la Presidencia - GT). (2010). Tercer informe de avances en el cumplimiento de los Objetivos de desarrollo del milenio. Objetivo 1: Erradicar la pobreza extrema y el hambre, 91. Retrieved from http://www.segeplan.gob.gt/downloads/ODM/III informe/ODM1.pdf

# Estudio transversal de la noción de Integral de Riemann en estudiantes de nivel licenciatura

Maythe García Rivero
Luz Ma. de Gpe. González Álvarez
maythe.garcía.rivero11@gmail.com


## Resumen

El presente trabajo muestra una investigación ex-post-facto, de índole cualitativa en la cual se tomó como estrategia de interpretación de datos la categorización cualitativa y como herramienta de análisis la elaboración de redes sistémicas, con las que se hace un estudio de las dificultades que presentan los estudiantes de la Licenciatura en Física y Matemáticas de la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional con respecto al uso y conceptualización del objeto matemático "Integral de Riemann", dentro de dos asignaturas del tronco común Cálculo II y Cálculo IV en las cuales el concepto[2] de integral de Riemann se conceptualiza y significa mediante su uso y estudio. De donde se encontrarob varios obstáculos y se plantean opciones para erforzar el proceso de enseñanza-aprendizaje.



## Palabras clave

Red sistémica, integral de Riemann, comprensión.


## Introducción

El correcto proceso de comprensión de un concepto permite al individuo tener una clara idea de él, trabajar todos sus aspectos y utilizarlo de manera adecuada. El presente trabajo pretende concientizar tanto a alumnos como profesores la importancia de que el alumno comprenda los conocimientos que trae del bachillerato antes de bombardearlo con conocimiento nuevo, exponiendo así el concepto Integral de Riemann, que resulta de vital importancia tanto para físicos como para matemáticos. El poder pasar de una expresión algebraica a una representación gráfica permite entender muchos fenómenos que no están asociados a la integral misma, resolver una integral puede ser mucho más sencillo si se comprende cómo interactúan otras operaciones con ella brindándonos una solución simple y efectiva a nuestro problema.

Los alcances que tiene el uso de integrales son impresionantes y son involucradas en la muchas de las investigaciones actuales de la ciencia, aunque el tema principal no esté relacionado con las matemáticas.

En este estudio el lector podrá encontrar, un análisis de algunas dificultades que presentan los estudiantes ante el uso y la conceptualización del objeto matemático "Integral de Riemann", realizado a partir de un cuestionario que se aplicó a estudiantes de dos cursos de cálculo, uno en segundo semestre de la licenciatura, y otro en el cuarto; y una postura de carácter didáctico que pretende distinguir un camino que resulte adecuado para llevar a cabo un correcto proceso de enseñanza-aprendizaje con respecto a la conceptualización de dicho objeto.

## Marco Teórico

Las matemáticas están repletas de objetos y conceptos abstractos que resultan inalcanzables para el mundo de lo tangible, por ejemplo, consideremos el número uno, podríamos encontrar este símbolo en una pizarra o incluso el sonido que se produce al leer “uno”, sin embargo, ninguno de ellos es un “uno”. Lo mismo nos pasaría si analizáramos un sin fin de conceptos matemáticos; por mucho que intentemos no podemos hacer físicos los objetos matemáticos, es decir son intangibles para nosotros. Al ser las matemáticas una ciencia intangible, la única manera que tenemos para poder interactuar con ella es por medio de representaciones.

El término representación se usa con diferentes sentidos. Por una parte, la representación es considerada como un objeto, bien mental o real, pero también la representación es la relación o correspondencia que se establece entre dos objetos, de manera que uno de ellos se pone en lugar del otro. Esta relación puede darse entre objetos del mismo mundo, o entre mundos diferentes (Font, 2000b).

En la actividad matemática se utilizan diversos sistemas de representación. Además del lenguaje natural se utilizan otros, como los sistemas de escritura con números o las escrituras algebraicas, figuras geométricas, gráficos cartesianos, diagramas, esquemas, redes, etc., donde cada uno de ellos cuenta con convenciones que lo conforman y con reglas que permiten establecer relaciones con otros objetos matemáticos. A pesar de la diversidad de sistemas de representación utilizados en la matemática, es importante considerar que diferentes sistemas no se oponen por completo, sino que es posible hallar alguna conexión entre ellos.

Debido a que las representaciones mentales están ligadas a la interiorización de representaciones externas y a que las imágenes mentales lo están a una interiorización de los perceptos, es claro que establecer conexiones entre ellas es un camino hacia la comprensión, donde estas interacciones son ligaduras entre representaciones que se fundamentan en las semejanzas o diferencias entre los sistemas de representación, el uso de analogías y metáforas.

Dentro de todos estos sistemas de representaciones vale la pena resaltar dos de ellos, el geométrico, que es de suma importancia para comprender un concepto abstracto y, el semiótico, que es el más empleado dentro de la matemática.

> Tras haber formado una primera imagen del concepto, el siguiente paso orientado hacia la comprensión del mismo y a la abstracción correcta es la geometrización, donde el estudiante se enfrenta a una primera interacción con el objeto en sí. Esta tarea no resulta fácil en todas las situaciones, pero es la más natural, porque está sobre un escenario de mucha confianza y firmeza para el estudiante: el mundo físico y material, lo que en consecuencia nos permite visualizar las propiedades de las matemáticas en un escenario “real” facilitando el entendimiento.
>
> Durante este proceso el estudiante toma su representación mental del objeto y la torna geométrica, hace una representación externa del objeto que puede compartir y describir con mayor facilidad, fortaleciendo aquellos aspectos que lo llevan a construir la representación interior a partir de la exterior.

> la utilización de símbolos se ha convertido en un medio básico para dirigir funciones psíquicas superiores o procesos mediatizados, incorporando a los signos como parte central y de gran importancia en el problema “En la formación del concepto, ese signo es la palabra, la que juega primero el papel de medio, y más tarde, se convierte en su símbolo.” (Vygotsky 1934). Quien toca un punto fundamental para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, pues el ser capaces de dirigir nuestros procesos mentales apoyándonos en signos y palabras, es parte integral para la formación de un concepto matemático.

En la matemática los conceptos se encuentran descritos por los atributos dentro de esta rama de la ciencia y por las relaciones entre conceptos que son posibles de construir o describir. Al ser la matemática una ciencia abstracta, estos conceptos surgen en este ambiente abstracto y los materializamos mediante algún sistema de representación que nos ayuda a describir estas relaciones y atributos de una manera eficiente.

En el caso de la matemática, los conceptos pueden tener propiedades que resulten difíciles de imaginar visualmente de manera simultánea, incluso es posible que parezcan contradictorias; es por esta razón que si se considera la imagen conceptual formada por un individuo, no se encuentra necesariamente congruente con la definición formal del objeto matemático, y dependiendo de la situación en la que se encuentre, el individuo invocará una fracción de su imagen conceptual que muestre las propiedades o atributos a los que quiere recurrir. Incluso, es posible que en una misma situación tenga que evocar varias partes de su imagen conceptual que no resulten del todo congruentes entre ellas, pero muestren las propiedades pertinentes para la resolución del problema que está tratando.

Llevar a cabo la conceptualización implica directamente que exista una coordinación entre los distintos registros de representación y la clara distinción entre cada uno de ellos y el concepto mismo.

Sin embargo, el proceso tiene algunos obstáculos de carácter epistemológico, que afectan al profesor, al alumno o al curso sobre el que se está trabajando. Donde el alumno es el sujeto que sale más perjudicado de un proceso de enseñanza ineficiente es el alumno, sin embargo, en muchas ocasiones es posible detectar que esto es debido al alumno mismo, aunque no sea capaz de percibirlo

> Son entorpecimientos, confusiones, causas de estancamiento y hasta de retroceso e inercia, que aparecen en el proceso de conocer, impidiendo al sujeto avanzar en esta tarea, y que son inherentes a esa actividad… (Vera 2011).

Del alumno.

- Utilitarismo
- Opinión
- Generalización
- Madurez cognoscitiva
- Experiencia básica
- Limitaciones genéticas

Del profesor.

- Lenguaje
- Personalidad
- Capacidades como profesor
- No considerar conocimientos previos

De la asignatura.

- Pasar de una matemática mostrativa a una demostrativa
- Conceptos abstractos

Leibniz en el desarrollo del cálculo consideró el concepto de integral como la suma de rectángulos infinitamente pequeños ydx; por lo tanto, ydx es el área de la curva y(x). Donde y es una función continua que depende de la variable y. Si bien no indicó los intervalos de integración, propuso especial atención a las constantes de integración.

Fue en 1822 cuando Cauchy introdujo una definición más precisa de la integral de una función continua y=f(x) respecto a la variable x en dos límites que estableció finitos y consideró una partición del intervalo de integración [$x_0$, X] y designo como $x_0$, $x_1$, …, $x_{n-1}$ los nuevos valores de x situados entre los dos límites considerados. Así considera a la suma de rectángulos referida a Leibniz de la manera

$$S=\sum_{i-1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}),$$

Donde las bases de los rectángulos son los elementos de la partición y, la altura consiste es las imágenes respectivas a estos valores. Y define a la integral como el límite de la suma S cuando la mayor de las longitudes $x_i$-$x_{i-1}$ tiende a cero. De esta manera es como la integral depende solamente de los límites de integración y de la función y.

Esta definición fue posteriormente complementada por Riemann con el Teorema fundamental del Cálculo. El cuál demuestra que si y es una función continua en todos los valores que se encuentran en el intervalo de integración entonces se cumple

F(x)= $\int_{x_0}^{x} y(t)\ dt$ satisface F'(x) =f(x).

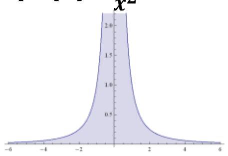
Tras el cuestionamiento del significado de la integral Riemann amplió la definición de integral a funciones discontinuas, aunque no consideró a todas las funciones.

## Metodología

Hay ocasiones en las que las variables que intervienen en el proceso que es estudiado no se pueden controlar por el investigador, como es el caso de esta investigación pues en el proceso de Aprendizaje existen múltiples variables que resultan imposibles de manipular como lo son la genética u origen cultural. Por lo que utilizar un diseño transversal de investigación resulta mucho más efectivo ya que permite realizar una toma de datos en un momento fijo para que después sean analizados.

El concepto de integral es ampliamente estudiado en la asignatura de Cálculo en sus distintos niveles, dado que dicha asignatura forma parte del tronco común del plan de estudios de la Licenciatura en Física y matemáticas de la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional, se consideró como muestra un grupo de 36 alumnos de segundo semestre y de cuarto semestre una muestra de 34 alumnos.

Para la toma de datos se utilizó como instrumento un cuestionario, en la tabla siguiente se muestra la descripción de la pregunta realizada y su objetivo:

| Ejercicio | Objetivos | Descripción |
|---|---|---|
| **1.- Explica con tus propias palabras cual es el significado de integral.** | ▪ Analizar cómo percibe el estudiante al objeto matemático “integral”. | ▪ No se menciona la palabra área.<br>▪ No aparecen gráficos ni registro algebraico. |
| **2.- a) Explicar por qué $\int_{-3}^{3} x^3 + x dx = \int_{-3}^{3} x^3 dx + \int_{-3}^{3} x\, dx$ .**<br><br>**b) Mostrar gráficamente cómo es que esto sucede.** | ▪ Determinar si el estudiante comprende la forma de obtener el área bajo la curva en términos de la integral. | ▪ No se menciona la palabra integral ni área.<br>▪ Se pide justificar la propiedad aditiva de la integral con expresiones explícitas.<br>▪ No hay gráficos.<br>▪ Se dan los intervalos de integración explícitos. |
| **3.- En ambos casos calcular el área de la región rayada**<br>**a) f(x)= $\frac{1}{x^2}$.**<br> | ▪ Analizar la respuesta del estudiante cuando debe calcular áreas por encima y por debajo del eje horizontal, así como | ▪ Se pide calcular el área.<br>▪ La región se identifica gráficamente.<br>▪ Hay regiones por encima y por debajo del eje. |

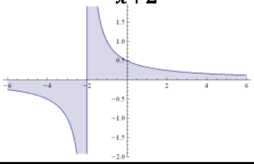
| | | |
|---|---|---|
| **b) g(x)=$\frac{1}{x+2}$ .**<br> | cuando se le presentan áreas infinitas. | ▪ No aparece la palabra integral.<br>▪ No se dan intervalos.<br>▪ Una función tiene una discontinuidad. |
| **4.- Calcular**<br>$\int_1^5 \lvert x^2 - 2 \rvert dx$ **.** | ▪ Determinar si el estudiante conoce y trabaja correctamente algunas propiedades de integrales.<br>▪ Analizar si el estudiante comprende y utiliza el cálculo de la integral en términos gráficos y de límites. | ▪ No se menciona la palabra área, ni límite.<br>▪ No hay gráficos asociados.<br>▪ Se da el intervalo de integración.<br>▪ Las expresiones usadas son explícitas. |
| **5.- El siguiente desarrollo es falso o verdadero?**<br>$\int 2e^{-2x}\,dx = -2\int e^{u}\,du$<br>$= -2e^{-2x}$ | ▪ Determinar si el estudiante entiende correctamente el cambio de variable. | ▪ No se da intervalos de integración.<br>▪ No aparecen gráficos.<br>▪ No se menciona el cambio de variable.<br>▪ El desarrollo es incorrecto.<br>▪ No aparece la palabra integral ni área. |

Tabla 1.- Cuestionario

Para mantener el contrato de confidencialidad con los alumnos se les proporcionó un seudónimo que permitiera identificar los resultados.

Con respecto al análisis de datos se optó por la utilización de redes sistémicas, el cual es un método de análisis sistémico de datos cuantitativos (Sanmartí, 1993) “la red sistémica ha de dar el máximo de información que permita estudiar las expresiones desde los muy diferentes puntos de vista”.

El esquema general de una red sistémica se ejemplifica en la siguiente figura:

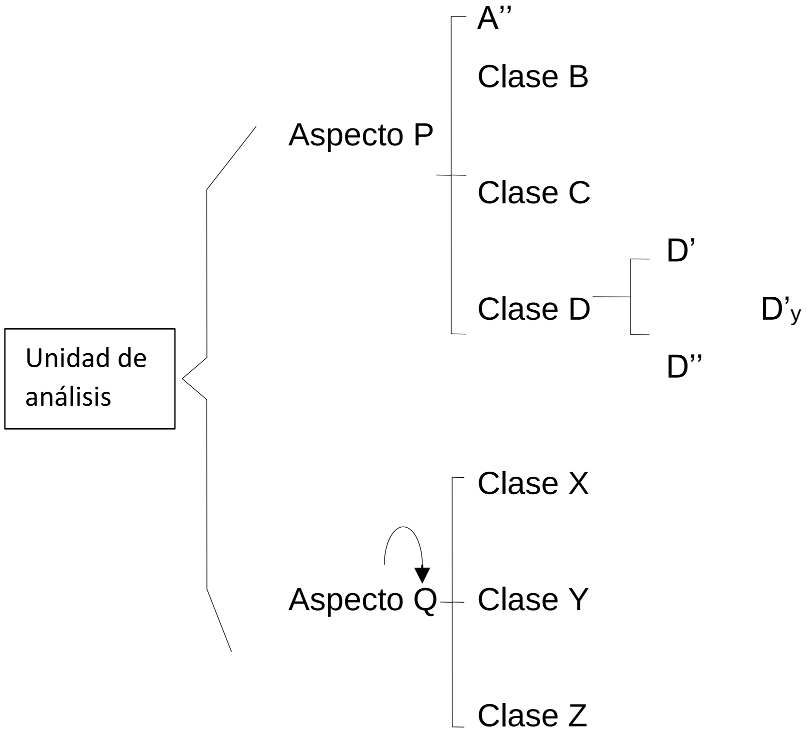


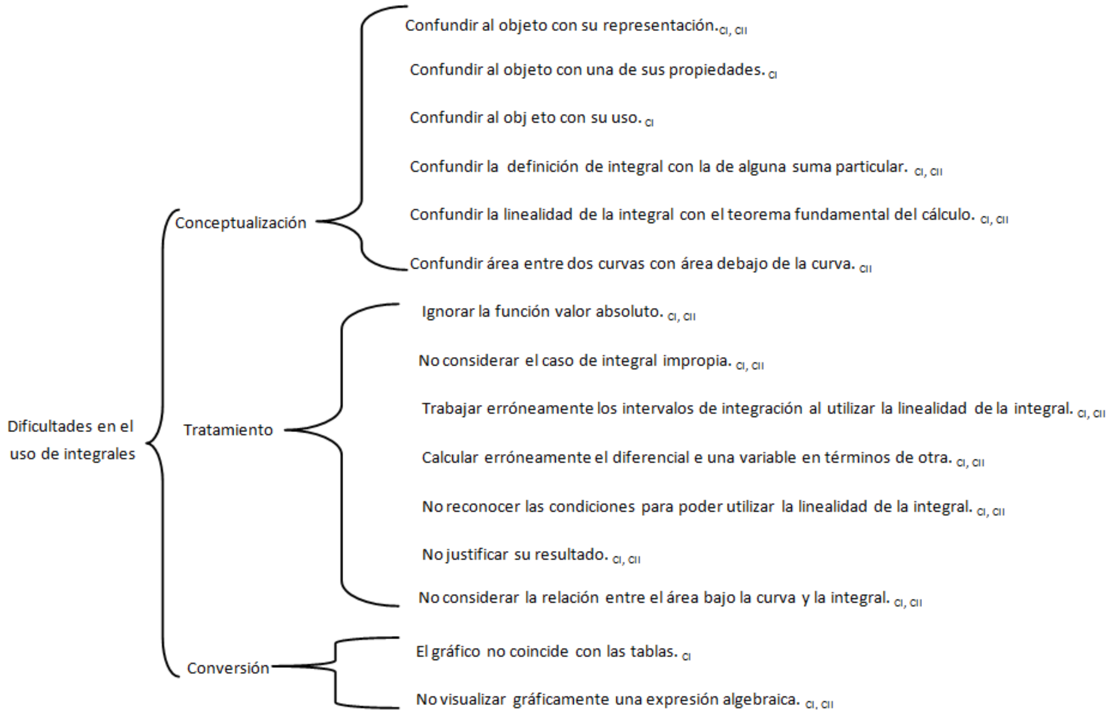

Figura 1 Red sistémica

Donde se utiliza el símbolo de reclusión (una flecha circular) con el fin de mostrar que un mismo alumno se recoge en diferentes categorías del sistema.

Cabe destacare que las categorías mostradas en el análisis fueron elegidas a partir de los conceptos utilizados, las características visuales, y de las respuestas textuales brindadas por los alumnos.

## Resultados

Las dificultades encontradas, se concentraron en la siguiente red, con la intención de mostrar las dificultades que presentaron los alumnos y tienen relación directa con el concepto "Integral de Riemann". Las categorías principales que fueron empleadas en este apartado tienen fundamento en la teoría de representación de Duval y de los campos conceptuales de Vergnaud, donde cada subcategoría hace referencia a la dificultad en concreto.




La dificultad de conceptualización se manifestó prácticamente de la misma manera en ambos cursos Cálculo II y Cálculo IV, la confusión entre el objeto matemático integral y su representación gráfica se hizo presente en ambos grupos, a quienes se les solicitó la definición de integral, en su respuesta se encontró total similitud a la descripción de la representación gráfica de la integral, es decir, el área bajo la curva de una función, más no el objeto en sí.

La confusión de la integral con la definición de una suma particular, quienes hacen referencia al proceso introductorio a la integral en el que se considera la definición de Darboux, el cual utiliza sumas superiores e inferiores, sin embargo, no describen el proceso completo o solo mencionan alguna de las propiedades que tiene esta suma, cuando en realidad la integral es definida en términos de supremos de sumas inferiores y de ínfimos de sumas superiores, donde algunos de los alumnos a pesar de considerar este hecho también reconocen a la integral como la ”antiderivada” de una función, cuando estos conceptos coinciden en algunos casos específicos.

Otra de las confusiones que se encontró fue la de confundir el teorema fundamental de cálculo con la propiedad de linealidad de la integral, atribuyendo que la propiedad de linealidad se cumple debido a la veracidad del teorema fundamental del cálculo, cuando se sabe que tiene que ver con la linealidad en la suma de funciones.

Por su parte en el curso de Cálculo II se encontraron otro par de dificultades que no se hicieron presentes en el curso de Cálculo IV, que son el confundir a la integral con el uso que se le da o con alguna de sus propiedades, se sabe que la integral es empleada para el cálculo de áreas bajo la curva pero calcular el área bajo la curva de una función no es precisamente realizar una integral, caso que se encontró en un alumno de Cálculo II. Además, se encontró que algunos de los estudiantes refieren a la integral simplemente como un operador lineal, cuando si bien la función integral tiene la propiedad de ser un operador lineal, existen operadores lineales distintos a la integral.

El problema de no tener clara la representación gráfica de la integral se hizo presente en ambos grupos, en Cálculo II la idea intuitiva de este concepto estaba bien fundamentada, aunque carecía de nombre, el grupo de Cálculo IV, uno de los alumnos confundió el concepto de área bajo la curva con el de área entre la curva de dos funciones y la utilizó en un diagrama, esta dificultad no fue observada en los alumnos de Cálculo II.

Con respecto a las dificultades que hacen referencia al tratamiento del concepto Integral, se encontró que ambos grupos presentan las mismas dificultades, las cuales son:

- Ignora la función valor absoluto. Cuando se les solicitó a los alumnos resolvieran la integral del valor absoluto de una función, un grupo de alumnos de ambos cursos evitó por completo trabajar con la función valor absoluto ignorando su aplicación en el ejercicio.
- No consideró el caso de integral impropia. En un par de ejercicios se le solicitó al alumno encontrar el valor del área bajo la curva de una función, en ambos casos el área que se solicito fue infinita, una gran parte de los alumnos decidió trabajar con integrales, para calcular el valor de dicha área, sin embargo no consideraron que el método para resolverla no bastaba con utilizar un formulario ya que se encontraba un punto de indeterminación de la función en el intervalo de integración, por lo que requería emplear integrales impropias, o bien, tomar otro método de resolución.
- Trabaja erróneamente los intervalos de integración al utilizar linealidad de la integral. Esta dificultad fue encontrada cuando los alumnos se enfrentaron con la función valor absoluto, transformaron una integral en una suma de integrales utilizando las propiedades del valor absoluto y la linealidad de la integral, sin embargo, se presentaron varios errores operacionales al determinar los nuevos límites de integración.
- Calcula erróneamente el diferencial de una variable en términos de otra. Para este caso solo se presentó en pocos alumnos, al trabajar el cambio de variable, no realizan el cambio apropiado para determinar el diferencial de la nueva variable que proponen.
- No reconoce las condiciones para poder utilizar la linealidad de la integral. Este caso se pudo percibir cuando se le solicitó al estudiante explicará por qué la integral es una función lineal, un grupo de estudiantes enfocó su respuesta en mostrar que la linealidad se cumplía por algunas de las características de las funciones utilizadas en el ejercicio, pero este listado de características resulta ser insuficiente para emplear la linealidad de la integral.
- No justifica su resultado. Para los alumnos de segundo semestre esta dificultad puede ser atribuida a que aún están acostumbrados a trabajar en una matemática explicativa, por lo que es común

encontrar que no justifiquen sus resultados, lo que llama más la atención es el caso de los alumnos de cuarto semestre pues ellos ya han trabajado con una matemática demostrativa y se esperaba que estuviesen acostumbrados a justificar y explicar sus resultados.

- No considera la relación entre el área bajo la curva y la integral. Desafortunadamente esta dificultad se hizo presente en varias ocasiones en ambos grupos, pues no muestran el trabajo de la integral a través de su interpretación gráfica, siendo esta una de las propiedades más importantes y características de la integral. Otro aspecto por mencionar relacionado con esta dificultad es que la mayoría de los alumnos reconoce a la integral como el área bajo la curva de una función de manera conceptual, pero no lo utiliza al tratar con la integral.

Con respecto a las dificultades de conversión en los alumnos de Cálculo II se encontró un alumno que trabajó con el gráfico de una función utilizando una tabla en la que se mostraban los valores que toma una función dependiendo del valor que toma la incógnita, pero el gráfico resultante no coincide con la información que era mostrada en la tabulación que había realizado previamente.

En ambos grupos se pudo observar que los alumnos entraron en conflicto en varias ocasiones porque no realizaron el gráfico correspondiente a la función o expresión algebraica que consideraban tratar, lo que los llevó a tomar conclusiones inapropiadas e incorrectas.

## Conclusiones

- Con respecto a los alumnos de cálculo 2, observamos que no tienen clara la Se identificó que los estudiantes de Cálculo II y Cálculo IV interpretan el objeto matemático integral como: una operación, valores numéricos, área bajo la curva de una función. Se detectaron diversas dificultades como: la conversión de un registro de representación a otro, la priorización del algebra al operar la integral como una ecuación y la visualización de la representación gráfica de la integral de una función.
- Se observó que gran parte de los alumnos confunden al objeto con sus distintas representaciones.
- Se pudieron reconocer algunas dificultades conceptuales como: Confundir al objeto con su representación, al objeto con una de sus propiedades, al objeto con su uso, la definición de integral con la de alguna suma particular, la linealidad de la integral con el teorema fundamental del cálculo y área entre dos curvas con área debajo de la curva.
- Tras analizar el acercamiento que se da a la integral en dos propuestas de los referidos libros a un curso de Cálculo, se detectó que hay falta de énfasis en las ideas del Cálculo a través de problemas importantes e

innovadores, restando importancia a todas las configuraciones epistémicas que se consideran para la integral, pues no considera la extramatemática ni la computacional. Sin embargo, resaltan que el Cálculo tiene diversas aplicaciones en diferentes áreas del conocimiento; los libros analizados son significativos, importantes y compatibles con el modelo teórico utilizado.

- Sin embargo, dichos significados serán complementados y resaltados con el estudio de los conocimientos previos de este estudio y con los significados personales de los profesores expertos en la enseñanza universitaria de cálculo.
- que los objetos matemáticos se resignifican de manera continua durante la preparación profesional del estudiante, en especial aquellos que como la Integral de Riemann se hacen presentes de manera longitudinal en la formación universitaria de los estudiantes.

**Referencias**

Edson Crisóstomo dos Santos (2012), Idoneidad de procesos de estudio del cálculo integral en la formación de profesores de matemáticas: una aproximación desde la investigación en didáctica del cálculo y el conocimiento profesional, Universidad de Granada.

Vygotsky, L. (2012 ) Pensamiento y lenguaje. México: Quinto sol.

Barrantes, H. (2006), Los obstáculos epistemológicos, cuadernos de investigación y formación en educación matemática

K. Gravemeijer1 y J. Teruel. J. (2000) Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. Currículo Studies, vol. 32, nº6, 777-796

Mariano Jiménez1 y Arantxa Areizaga2, Reflexiones acerca de los obstáculos que aparecen, en la enseñanza de las matemáticas, al pasar del bachillerato a la universidad, Instituto de Bachillerato Koldo Mitxelena

Gaston Bachelard (1948), La formación del espíritu científico. Siglo veintiuno editores.

Juan D. Godino (2003) Teoría de las Funciones Semióticas, Servicio de reprografía de la Facultad de Ciencias. Granada.

Ausubel D. P.-Novak J.D. y Hanesian,H , Psicología educativa,Virtual Educa Espinosa

Raymond Duval, Registro de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento, Université Louis Pasteur, France, Ed. Hlit F, pags. 173-201

# Lectura de textos de divulgación científica como herramienta de aprendizaje

Juan Manuel Contreras Reyes[73]

e-mail: yah_ely@yahoo.com.mx

*Resumen – La siguiente investigación analiza el propósito en los estudiantes de efectuar lecturas recreativas y complementarias de carácter científico, como parte formativa en la carrera de Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica.*

*Palabras Clave: Lectura de textos científicos, Noción científica en la ingeniería, Competencias del Proyecto Tuning.*

## Introducción.

La enseñanza de las ciencias abarca varios aspectos, desde transmitir los procesos lógicos y metodológicos en la solución de problemas numéricos, hasta la retroalimentación correcta de los conocimientos a través de la inducción del maestro, sin embargo, a veces un aspecto que se puede pasar por alto es la lectura recreativa de textos epistemológicos sobre las asignaturas a estudiar.

Por lo cual, esta investigación presenta un marco objetivo de la posibilidad de incluir lecturas de estudio en el desarrollo del aprendizaje por parte de los alumnos, con resultados de campo en la ingeniería de comunicaciones y electrónica de la E.S.I.M.E.

## Marco teórico.

Valoración de la herramienta de lectura de textos de divulgación científica en el proceso de enseñanza.

Del compendio de competencias del Proyecto Tuning Latino (Beneitone, 2007), para el desarrollo de esta investigación se tomaron en cuenta las siguientes que se enuncian:

Competencia 17.
Buscar, interpretar y utilizar información científica.

Competencia 18.
Comunicar conceptos y resultados científicos en lenguaje oral y escrito ante sus pares, y en situaciones de enseñanza y de divulgación.

Competencia 21.

[73] Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.

Conocer y comprender el desarrollo conceptual de la física en términos históricos y epistemológicos.

Uno de los aspectos que puede pasar desapercibido en el proceso de enseñanza se refiere a estimular a los estudiantes a realizar lecturas recreativas de textos de divulgación científica, que no tiene otro fin que complementar su formación profesional en una forma de cultura y esparcimiento.

Por lo cual, este estudio tiene como finalidad observar en la práctica el uso de textos de divulgación científica como una herramienta útil de aprendizaje para los estudiantes, además de fundamentarlo en competencias específicas del Proyecto Tuning para América Latina.

**Metodología.**

Se seleccionaron los siguientes textos para conformar la base de lectura:

1. Isaac Newton: una vida, del autor Richard Westfall.
   (Ref. 3).

2. Schrödinger: creador de la mecánica ondulatoria, del compilador Roberto Jiménez. (Ref. 4).

3. A propósito de Galileo, de José Altshuler. (Ref. 5).

Además, se eligió un grupo de 33 alumnos de primer semestre en la asignatura de física clásica, para la lectura no.1, actividad que se presentó en carácter de opcional, y valorativa de 1 punto en calificación final, entregando un ensayo de 3 a 5 cuartillas.

Luego para dos grupos de cuarto semestre, sumando un total de 53 alumnos, en la materia de mecánica cuántica y mecánica estadística, se leyó en clase un artículo acerca de Clerk Maxwell titulado Mecánica Estadística, de la lectura no.3; y como parte del proceso de evaluación se consideró la lectura no.2, con la indicación de la entrega de un trabajo desarrollado en relación con los temas vistos en clase.

Finalmente, para un grupo de octavo semestre, con 31 alumnos, y otro de noveno semestre, con 28 alumnos, se eligieron las lecturas no.1 y no.3. En este caso, los estudiantes cursaron la asignatura de tópicos selectos de ingeniería I y II, y corresponde propiamente al proceso particular de un proyecto de titulación, por lo que en estos semestres se vuelve más significativo el hecho de comenzar a escribir un texto, orientado al desarrollo de una tesis como tal, por lo cual, la lectura y la redacción cobran una relevancia substancial.

Las tres muestras de alumnos fueron atendidas en la segunda parte del ciclo escolar 2014-2015, y en el ciclo escolar 2015-2016, abarcando una totalidad de tres semestres.

Es importante mencionar que se decidió contemplar diferentes semestres de los cursos de física en la carrera en Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica: primero, cuarto, octavo y noveno, para observar similitudes y diferencias en varios momentos del avance de la carrera, y también en instantes distintos para los alumnos: el inicio, parte intermedia y el final de la carrera.

## Resultados

Tablas y gráficas representativas de los resultados.

Tabla 1. Porcentaje de lectura.

| Semestre | Muestra (alumnos) | Respuesta de lectura (alumnos) | Porcentaje de respuesta |
|---|---|---|---|
| 1º. | 33 | 2 | 6.06% |
| 4º. | 53 | 52 | 98.11% |
| 8º. | 31 | 31 | 100% |
| 9º. | 28 | 1 | 3.57% |
| | | | |
| TOTAL | 145 | 86 | 59.31% |

### Muestra 1. Alumnos de 1er. Semestre.

De la tabla 1, en conjunto con el gráfico 1, se observa que la muestra 1, alumnos de primer semestre, respondieron a la asignación de 1 punto adicional sobre la evaluación final de la asignatura de física clásica en un total de 2 estudiantes, únicamente por el estímulo de aumentar el valor numérico de la calificación del curso a un total de 7.0.

Lo anterior nos permite observar que al inicio de la carrera no parece importante considerar lecturas de textos científicas como un complemento formativo, aún con el incentivo del puntaje extra.

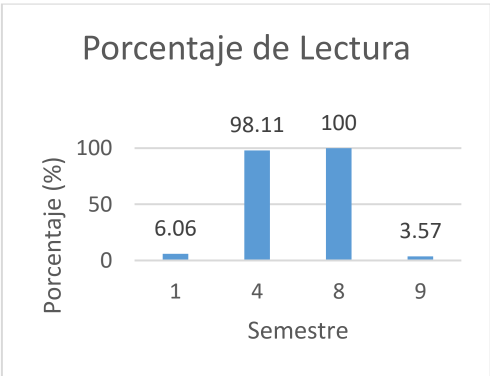



Gráfico 1. Comparación de lectura entre semestres.

### Muestra 2. Alumnos de 4o. Semestre

Para el segundo caso, de los 53 alumnos, se observó una respuesta de un total de 52 alumnos. En este grupo, al proponerse la actividad de lectura como un ejercicio de retroalimentación para el desarrollo de la asignatura, los estudiantes manifestaron en un 98.11% su interés al respecto, lo cual se reporta como una valoración satisfactoria en la formación de la carrera.

Asimismo, se contempla el desarrollo de hábitos de trabajo mejor forjados y en un avance del segundo año de la ingeniería. La evaluación se aceptó como una tarea escolar de investigación elaborada en forma escrita.

### Muestra 3. Alumnos de 8o. Y 9o. Semestre

En la muestra de los alumnos de octavo y noveno semestre, donde la necesidad de escribir es imperante, derivado de un proyecto de investigación que culmina en la elaboración de una tesis terminal, la actividad se asignó como una premura de inicio de curso en los alumnos de octavo semestre, mientras que como actividad complementaria para los estudiantes de noveno semestre.

La respuesta a la lectura del grupo de octavo semestre fue el 100%, es decir, la totalidad de alumnos entregaron un breve ensayo en 2 a 3 cuartillas, sobre los artículos de la ref. 3 “A propósito de Galileo”, que trataban temáticas acerca de las aportaciones de Galileo Galilei, Clerk Maxwell y Niels Bohr.

El indicador de porcentaje favorable se justifica por efectuar aseveraciones acerca de que la entrega de los ensayos individuales respaldaría un comienzo en el proceso de la redacción de objetivos, planteamiento y justificación del proyecto de tesis en ejecución. La única contraindicación que se observó por parte de los alumnos fue una prórroga de tiempo para la entrega de los ensayos.

En la muestra de alumnos de noveno semestre, un grupo con una dinámica de trabajo diferente al anterior, que se atendió a partir del noveno semestre y no desde el octavo, se obtuvo como resultado, de los 31 integrantes, que sólo 1 alumno entregó la actividad como tarea a revisión.

De lo anterior, se menciona que el no culminar el proyecto de investigación como tesis terminal, la actividad complementaria de la lectura completa de la ref. 1 “Isaac Newton: una vida”, y la entrega de un ensayo en extenso de 5 a 10 cuartillas, se contempló como la actividad para la asignación de calificación de la asignatura tópicos selectos de ingeniería II en el cumplimiento de los créditos, que también resulta como una alternativa de inscribir esta materia.

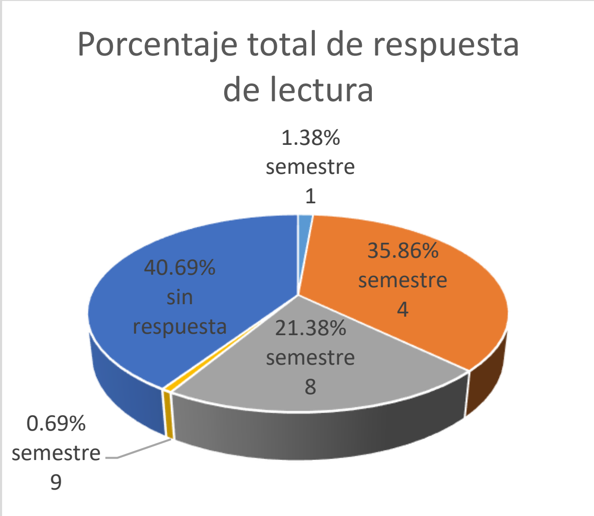



Gráfico 2. Respuesta de lectura del total de alumnos.

Por último, los grupos que reportaron mayor atención a la lectura, resultó los correspondientes al cuarto semestre, con un porcentaje de 35.86% del total de alumnos de la muestra, lo cual radica en la dosificación ponderada de la lectura, cuando los semestres octavo y noveno deberían resultar con mayor puntuación por corresponder al eje orientado a la titulación.

## Conclusiones

La lectura de textos de divulgación o carácter científico no es una fortaleza para la formación de estudiantes de ingeniería de acuerdo con esta investigación de campo.

Las competencias del Proyecto Tuning Latino referentes a este tema, sólo serán atendidas en la medida en que el profesor indique la justificación de la asignación de una lectura valorativa de textos en ciencia.

Sin embargo, la noción de la ciencia para la aplicación en la ingeniería por parte de los estudiantes es importante para su formación escolar, y por supuesto, puede ser una herramienta de enseñanza propicia y aprovechable.

## Referencias bibliográficas

1. Beneitone, Pablo. “Reflexiones y perspectivas de la educación superior en América Latina, Informe Final Proyecto Tuning para América Latina 2004-2007”. Publicaciones de la Universidad de Deusto, Bilbao, 2007.

2. Contreras Reyes, Juan Manuel - Méndez Sánchez, Arturo Fidencio, “Análisis de las competencias de Física que han desarrollado estudiantes de la

Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica del IPN", memorias electrónicas de la XVIII RNFM - ESFM, IPN, pág. 89-93, 2013.

Textos de lectura para esta investigación

3. Westfall, Richard.
   ISAAC NEWTON: UNA VIDA.
   Biblioteca ABC. México, 2004.

4. Jiménez, Roberto (compilador).
   SCHRÖDINGER: CREADOR DE LA MECÁNICA ONDULATORIA.
   FCE. 2ª. ed., México, 2001.

5. Altshuler, José.
   A PRÓPOSITO DE GALILEO.
   FCE. México, 2002.

# La evaluación criterial: dificultades de aprendizaje en contenidos de álgebra superior en estudiantes de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones

José Alberto Jiménez López[74],
Xaab Nop Vargas Vásquez[75]
alberto.jimenez.ped@gmail.com

## Resumen

Este trabajo presenta un análisis a profundidad de las dificultades conceptuales y procedimentales encontradas en un grupo de estudiantes de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones en el aprendizaje de contenidos matemáticos de la asignatura Álgebra Superior. Utilizando como referente teórico y metodológico el enfoque criterial de evaluación, se describen los criterios de evaluación formulados con base en el plan de estudios de la asignatura mencionada, los criterios de valoración, la parrilla de evaluación y los puntajes obtenidos por cada estudiante. Asimismo, se presenta un análisis minucioso de los principales aciertos y dificultades (errores) encontrados, a partir de realizar la lectura horizontal y vertical de la parrilla de evaluación. Los resultados reflejan un dominio conceptual de las herramientas matemáticas y dificultades a nivel procedimental-contextual.

## Palabras clave

Evaluación criterial, álgebra superior, ingeniería electrónica.

## Introducción

Parafraseando a Larroyo (1954), la actividad pedagógica requiere de una minuciosa investigación de sus resultados, de sus aciertos, de sus dificultades. A partir de la revisión de los frutos obtenidos en la enseñanza, el docente podrá llegar a conocer a los estudiantes, saber cuáles son sus aptitudes, sus intereses, sus inclinaciones y su rendimiento. El principio evaluativo contenido en las palabras expresadas por éste pedagogo nos remite a lo necesario que es establecer con precisión el nivel de aprovechamiento de los estudiantes, y por consiguiente ayuda a saber con certeza la idoneidad de los métodos educativos.

Este trabajo intenta responder a la preocupación de las instituciones sobre las causas del bajo aprovechamiento y deserción escolar en los primeros semestres del nivel superior. La investigación se enfoca en analizar los aprendizajes en álgebra Superior, en estudiantes de primer semestre de ingeniería de la Universidad La Salle Oaxaca. Los datos utilizados en el análisis se recopilaron con la ayuda de un examen diseñado desde la perspectiva criterial de la

[74] Universidad La Salle Oaxaca.
[75] Wejen Kajen Indigenous Research Institute International A.C. /Instituto de Estudios Superiores Rosario Castellanos

evaluación y la interpretación se efectuó con el apoyo de una matriz denominada "parrilla de evaluación".

## Marco Teórico

Evaluar el aprendizaje es una tarea más compleja de lo que a simple vista parece, implica una serie de cuestiones a considerar en aras de garantizar el aprendizaje. Diversas perspectivas figuran en la literatura referida a la evaluación educativa y la evaluación del aprendizaje: propuestas centradas en verificar el cumplimiento de los objetivos de aprendizaje (Tyler), en la planificación de la evaluación (Cronbach), evaluar con miras al perfeccionamiento (Stufflebeam), entre otros. A pesar de la existencia de un vasto bagaje teórico y metodológico, aún persisten en las aulas prácticas centradas en la tradición tyleriana, es decir, prácticas de evaluación centrados en verificar el nivel de cumplimiento de los objetivos de aprendizaje establecidos previo a la tarea de enseñanza, priorizando la función sumativa y calificadora de la evaluación.

Afortunadamente, superar la tradición tyleriana, aportó nuevas reflexiones y propuestas que se alejan de una evaluación que enfatiza la medición como único propósito. En esta tarea encontramos la propuesta efectuada por Michael Scriven, el cual introduce conceptos y metodologías al campo de la evaluación destinados a superar la evaluación desde los objetivos a una evaluación centrada en las necesidades. Por lo tanto, define la evaluación como "la valoración sistemática del valor o el mérito de las cosas, y ha subrayado que los evaluadores deben ser capaces de llegar a juicios de valor justificables más que de medir cosas o determinar si las metas han sido alcanzadas" (Stufflebeam y Shinkfield, 1985).

En su proceso de crítica y deconstrucción del concepto predominante de evaluación, Scriven acuña el término de evaluación formativa, el cual se convierte en un referente para vislumbrar otras maneras de entender el acto evaluativo; ya que cambia su intencionalidad, "la evaluación formativa es una parte integrante del proceso de desarrollo. Proporciona información continua para ayudar a planificar y luego producir algún objeto" (Stufflebeam y Shinkfield, 1985). Interesa a nuestro propósito enfatizar el reconocimiento de la evaluación como parte integrante del proceso (enseñanza-aprendizaje), permite entender que la evaluación es un elemento paralelo o concomitante a la ejecución y desarrollo de determinadas actividades, y en este caso, de la tarea de enseñanza y aprendizaje. De igual modo, la evaluación según la perspectiva de Scriven proporciona información continua sobre el proceso en desarrollo con miras a intervenir en el mismo a partir de la información recabada.

Las aportaciones de Scriven encuentran un eco en el enfoque criterial de evaluación, en tanto que éste último concibe la evaluación como el proceso que proporciona información sobre los dominios y dificultades de los estudiantes en función de la intención de la enseñanza. El enfoque criterial fue propuesto por Glaser en 1963; con el cual se introduce al campo de la evaluación del aprendizaje una aportación que pondera la función formativa y pedagógica. Ya que Glaser al referirse a los resultados reflejados en el proceso de evaluación nos dice que:

> La puntuación de un estudiante en un test referido al criterio posee información explícita de lo que el individuo puede o no hacer. Las medidas referidas al criterio indican el contenido de un repertorio de conductas y la correspondencia existente entre lo que el individuo hace y un continuo subyacente del rendimiento (Glaser citado en Díaz y García, 2004, pp. 170-171).

El principio fundamental que subyace en el párrafo anterior, nos muestra que la importancia de juzgar el aprendizaje desde el enfoque criterial radica en el valor de la información que se obtiene como base para analizar la situación de aprendizaje en el que el estudiante se encuentra; por encima del valor *en sí* de los datos o puntos obtenidos.

La utilización del enfoque criterial de evaluación es escaso en nuestro país, por tal motivo esta investigación toma como referente principal los trabajos efectuados por Vargas y otros (2007), en tanto, que sus estudios se enfocan en demostrar la riqueza de esta perspectiva de evaluación. Para estos autores la evaluación entendida desde lo criterial debe tener en cuenta en todo momento los estándares mínimos que se persiguen al final de una actividad de enseñanza, juzgando los avances en el proceso de aprendizaje, basados en criterios establecidos para tal fin. Los estándares refieren a los requisitos mínimos (habilidades, competencias y destrezas) que deben cubrir los estudiantes al momento de cursar un ciclo, asignatura o grado determinado.

Vargas (2007), documenta un estudio enfocado en evaluar la capacidad de un grupo de estudiantes de nivel básico para realizar lecturas e interpretación de mapas y croquis. Los resultados obtenidos reflejan que un porcentaje significativo de los estudiantes participantes del estudio presentan dificultades al momento de identificar los puntos cardinales este y oeste; así como, ciertas deficiencias en la orientación espacial y ubicación de los puntos cardinales en la rosa de los vientos.

En otro estudio Reyes, Vargas y Martínez (2017), se dieron a la tarea de analizar el uso correcto de las grafías x, zh, ë, y saltillos (´) en la escritura de la lengua zapoteca en un grupo de estudiantes de nivel bachillerato. Para esto establecieron dos dominios (completar y corregir), que a su vez permitieron establecer seis objetos de evaluación. El análisis efectuado a través de una parrilla de evaluación permitió identificar que, de los seis objetos, en cuatro de ellos existe dificultad al momento de corregir y completar un texto haciendo uso de la x, zh, (`) y ë. De igual manera se constató que existe dominio al momento de completar un texto empleando adecuadamente los saltillos y la ë; Dichos resultados sirvieron de base para el diseño de un material (aplicación móvil) enfocada a superar las deficiencias encontradas.

De igual modo, Pacheco y Vargas (2013), realizaron una evaluación a la que denominaron transversal, en combinación con el enfoque criterial, el procedimiento implementado contempló tres momentos fundamentales: Aplicación de una evaluación preliminar, ejecución de una secuencia de enseñanza y aplicación de una evaluación posterior. La finalidad de dicho estudio consistió en verificar la validez y pertinencia de la secuencia de enseñanza en el logro de los aprendizajes del curso denominado “la representación gráfica y algebraica de la línea recta”; concretamente se buscó valorar la apropiación de los siguientes “criterios”: que el estudiante “deduzca la ecuación que modela una gráfica” y “bosqueje una gráfica dada una ecuación”. Concluye que los procesos que reportan mayor dificultad para los estudiantes se ubica en la habilidad del alumno para relacionar una ecuación con su gráfica correspondiente; con menor dificultad se localiza la habilidad para bosquejar una gráfica y con dificultades mínimas aparece la habilidad para deducir una ecuación a partir de una gráfica dada.

Las evidencias que proporcionan los estudios mencionados, muestran la riqueza del enfoque criterial en la tarea de evaluar el aprendizaje, sin embargo, habrá que trasladar dichas experiencias al nivel superior.

***La evaluación de contenidos matemáticos en el nivel superior***

Evaluar el aprendizaje es una tarea que demanda conocimientos teóricos, técnicos, habilidad de análisis e interpretación de información. Esta tarea adquiere características particulares al llevarla al campo de la enseñanza matemática en el nivel superior, ya que, existen diversos factores que intervienen al momento de valorar el aprendizaje; éstos tienen que ver con el perfil de los profesores, la experiencia de aprendizaje, lineamientos administrativos, experiencias de evaluación previas, etc.

Jarero, Aparicio y Sosa (2013), plantean que, en el nivel superior, “la evaluación comprende más que un juicio o un proceso con funciones pedagógicas y administrativas, es ante todo un sistema de interrelaciones entre los que evalúan, los que son evaluados y la estrategia empleada”. Las interrelaciones a que refieren los autores, aportan elementos que hacen de la evaluación del aprendizaje en nivel superior un proceso compuesto por tres variables: el conocimiento del docente sobre la evaluación, las experiencias de los estudiantes y la “metodología” implementada para valorar el aprendizaje; esto reviste de complejidad a un proceso que ya lo es en sí.

Atendiendo a la primera variable (conocimientos), diremos que el perfil docente del área de matemáticas en el nivel superior, se caracteriza porque en su mayoría son profesionistas especializados en el campo de la ingeniería o ciencias exactas, y muy pocas veces cuentan con una formación pedagógica que les dote de conocimientos y habilidades para evaluar el aprendizaje de sus estudiantes. Esto genera un escenario en el cual no existe consenso sobre la concepción y metodología para valorar el aprendizaje; luego entonces los docentes reproducen las estrategias que observan de sus demás compañeros o en el peor de los casos recuperan su experiencia vivida como estudiantes.

Por otra parte, las prácticas de evaluación se caracterizan por ser una “práctica evaluativa donde la atención justamente es valorar un procedimiento y no el logro de un aprendizaje, o más aún, las fortalezas y debilidades del proceso educativo” (Jarero, Aparicio y Sosa, 2013, pág. 224 ). Podríamos decir que la evaluación de los contenidos matemáticos, se centra en verificar la habilidad del estudiante para desarrollar adecuadamente un procedimiento, por encima del reconocimiento de los procesos de aprendizaje puestos en marcha para asimilar los conocimientos y habilidades que se quieren lograr; es decir, “no se identifica una alusión al aprendizaje logrado por el estudiante, más bien, se refieren a aspectos puntuales sobre el procedimiento resolutivo que éste no logra realizar correctamente” (Jarero, Aparicio y Sosa, 2013, pág. 225 ).

Las particularidades mencionadas sobre la evaluación del aprendizaje en contenidos matemáticos en el nivel superior (desde el perfil docente), son resultado de un problema que es necesario atender con urgencia. Es vital que los docentes reflexionen sobre la importancia de su papel en la valoración de los aprendizajes, tomen conciencia sobre su responsabilidad como agentes generadores de verdaderas prácticas de evaluación fundamentadas; aunado a esto, las instituciones deben revisar el lugar que ocupa dentro de sus actividades la capacitación continua del personal docente en contenidos sobre la temática en cuestión, de lo contrario seguiremos reproduciendo prácticas evaluativas reducidas a la finalidad administrativa y calificadora.

La segunda variable, correspondiente a la experiencia de evaluación desde la mirada de los estudiantes, está estrechamente relacionado con el ejercicio de evaluación desarrollado por los profesores, es decir, si los profesores desde el nivel básico, medio superior y superior promueven una evaluación calificadora, generan una bagaje experiencial en los estudiantes que configura una concepción y posicionamiento frente a dicha actividad; postura que se caracteriza por la memorización de respuestas esperadas por el docente, sin tomar conciencia sobre la apropiación y dominio de los aprendizajes que garanticen un desempeño exitoso en su vida profesional.

Tenemos entonces estudiantes que solo memorizan para obtener altos puntajes en el examen, conseguir calificaciones aprobatorias, memorizar procedimientos que repetirán en el examen; todo esto con la finalidad de acreditar las materias. Lo imperante es que todo lo anterior, va conformando una visión sobre el aprendizaje científico y profesional. En este tenor, Jorba y Sanmartí (1996, p. 18), en sus investigaciones en este campo afirman lo siguiente:

> Muy a menudo los estudiantes tienen la percepción que aprender ciencias es aprender un gran número de palabras nuevas y sus definiciones o fórmulas para aplicarlas en la resolución de problemas. De la misma manera creen que las matemáticas se reducen a repetir de manera mecánica un elevado número de ejercicios –según un modelo presentado por el profesorado– en los que no tienen cabida ni la iniciativa, ni la creatividad, ni la imaginación. Muchas de estas actitudes responden al tipo de enseñanza que han recibido durante años [...].

Por lo tanto, la pedagogía del examen ha contribuido a generar estudiantes con poca iniciativa, creatividad e imaginación. Ya que su visión sobre el aprendizaje corresponde a una conciencia de lo inmediato, es decir, memorizar lo necesario para aprobar el examen o acreditar la asignatura. Ante este escenario, es imprescindible que profesores, estudiantes e institución tomen conciencia de dicha problemática y emprendan acciones que gradualmente impulsen una nueva visión sobre la evaluación y el aprendizaje.

La tercera variable relacionada con la "metodología" de evaluación desarrollada, se relaciona directamente a la concepción pedagógica y didáctica sobre las actividades de planeación, enseñanza y evaluación, ya que, es común que en la práctica cotidiana se tiene una visión fragmentada de dichos procesos; lo cual hace que los docentes conciban que la planeación nada tiene que ver con la evaluación, creen que enseñar es un momento totalmente aislado al proceso de evaluación. Este razonamiento conduce a pensar la evaluación como el recurso que entra en juego al final del proceso y sin vinculación con los procesos previos (planeación-enseñanza).

Considerando lo anterior, la metodología de evaluación está relacionada con "el tipo de técnicas empleadas para evaluar los aprendizajes están asociadas con instrumentos que en su mayoría se rigen por la subjetividad de quienes los elaboran (profesores) y en los que usualmente se deja a un lado la participación activa de los evaluados (Jarero, Aparicio y Sosa, 2013, p. 216). Una metodología como tal, debe considerar momentos de retroalimentación, fase en la cual es necesaria la participación e involucramiento de los estudiantes, de lo contrario el proceso queda incompleto y se pierde la oportunidad de favorecer en los estudiantes procesos de coevaluación y autoevaluación. Lo cierto es que en el nivel superior predomina la prueba escrita como el instrumento más común para valorar el logro de los aprendizajes en contenidos matemáticos. Resulta primordial mencionar que independientemente de su recurrencia, lo que se debe tener en cuenta es el procedimiento a partir del cual se diseña, así como los criterios con los cuales se analizan los resultados obtenidos; al considerar dichos elementos estaremos entrando en la ruta de lo que podría comenzar a denominarse una metodología de evaluación.

La insistencia de este trabajo es que la didáctica de la enseñanza determina la didáctica de la evaluación. Considerando que la enseñanza de las matemáticas está determinada por la naturaleza de los contenidos que se abordan, se retoma la propuesta de Sanmartí (1996), como alternativa para transformar el panorama de la evaluación en el nivel superior, al considerar los momentos a tomar en cuenta en el recorrido didáctico y su relación con la evaluación son: actividades de exploración, actividades de introducción de conceptos/procedimientos o de modelización, actividades de estructuración de conocimientos y actividades de aplicación.

En definitiva, si el docente reconoce su representación sobre la evaluación del aprendizaje, identifica sus flaquezas y aciertos; y en consecuencia modifica su forma de enseñar y evaluar, de esta manera se comenzará un recorrido que seguramente culminará en prácticas de evaluación que resignifiquen el sentido pedagógico de la misma.

## Metodología

Para identificar las dificultades de aprendizaje en la asignatura álgebra superior en los estudiantes de ingeniería de primer semestre de la Universidad La Salle

Oaxaca, se trabajó con tres grupos, los cuales respondieron un examen elaborado desde el enfoque de evaluación criterial, dicho instrumento tuvo como intención identificar los contenidos y procedimientos (habilidades) donde los estudiantes presentan dificultades al momento de adquirir los aprendizajes en contenidos matemáticos.

### *Descripción de la población y procedimiento de muestreo*

La población con la cual se trabajó en esta investigación se compone de 37 estudiantes inscritos en el plan de estudios de Álgebra Superior, de la Universidad La salle Oaxaca. Sin embargo, en este escrito se reportan los resultados correspondientes a los estudiantes de Ingeniería en Electrónica y Telecomunicaciones; compuesto por 7 estudiantes, de los cuales 6 son hombres y 1 mujer, cuyas edades oscilan entre 18 y 21 años.

El criterio de selección fue por conveniencia, ya que según datos proporcionados por la coordinación a la que pertenecen dichas ingenierías, en el primer semestre se reporta un porcentaje alto de estudiantes que desertan debido a las dificultades que enfrentan en la asignatura Álgebra Superior.

El estudio es de tipo transversal; puesto que los datos se recolectaron en un solo momento en un tiempo único, es de tipo descriptivo-interpretativo pues se indaga la incidencia de las modalidades, categorías o niveles (Hernández, Fernández y Baptista, 2010: 151-152), en este caso se busca conocer las dificultades que los estudiantes enfrentan al momento de aprender contenidos matemáticos, con la finalidad de establecer un plan de mejora y fortalecimiento.

La recolección de los datos se efectuó en el mes de octubre de 2017, la aplicación del instrumento abarcó un tiempo de una a dos horas.

### *Criterios de evaluación*

Para establecer los criterios de evaluación se tomó como base el Programa de Estudios de la asignatura de Álgebra Superior, se realizó un análisis del objetivo general de aprendizaje estipulado en dicho programa para la ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones (LIE 101). A continuación, se presenta el objetivo cuyo alcance establece:

“Aplicar los elementos del álgebra superior, para resolver problemas en la Ingeniería” (Plan LIE, 2017). En el proceso de análisis del programa, se precisó el nivel taxonómico bajo el cual se diseñó el objetivo del programa, esto sirvió de guía para definir los criterios mínimos de evaluación, los cuales quedaron de la siguiente manera:

a) Identificar los modelos del álgebra superior para la solución de problemas dados.

b) Aplicar los principios teóricos y conceptos del álgebra superior para la solución de problemas.

Tomando como referente los objetivos anteriores se diseñó la tabla de criterios de evaluación, misma que fungió como tabla de especificaciones para el diseño del instrumento de recolección de datos, el cual consistió en un examen. A continuación, se muestra el modelo utilizado.

*Tabla 1. Criterios de evaluación*

<table>
<tr><th>Objeto</th><th colspan="3">Descripción</th></tr>
<tr><td>Identificar</td><td colspan="3">Capacidad del alumno para identificar los modelos del álgebra que resuelvan un problema dado.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Resolver</td><td rowspan="3">Habilidad del alumno para resolver un problema matemático dado.</td><td colspan="2">Procedimental</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Contextual</td><td>Problema al modelo</td></tr>
<tr><td>Modelo al problema</td></tr>
</table>

Fuente: adaptación de Vargas (2018).

Los reactivos o ejercicios que integran el instrumento suman un total de 5, algunos se desglosaron en unidades más específicas. El reactivo 1 consta de 7 incisos enfocados a evaluar la capacidad del estudiante para identificar la herramienta matemática que modela el problema dado. El reactivo 2, corresponde a un ejercicio de aplicación procedimental e indaga la habilidad del estudiante para aplicar procedimientos algorítmicos a un caso concreto. Los ejercicios 3, 4 y 5 son ejercicios de aplicación contextual donde se indaga la habilidad del estudiante de transitar de un problema dado a su modelo y resolverlo (ejercicios 3 y 4) y de un modelo a la redacción de un problema (5.a, 5.b). Los tres últimos reactivos valoran la habilidad del estudiante para transferir y aplicar sus conocimientos a problemáticas contextuales concretas.

La siguiente tabla describe a detalle las especificaciones utilizadas para el diseño del instrumento de recolección de información.

*Tabla 2. Criterios de evaluación y número de especificaciones.*

<table>
<tr><td>Objeto</td><td colspan="3">Descripción</td><td>Cantidad de especificaciones</td></tr>
<tr><td>Identificar</td><td colspan="3">Capacidad del alumno para Identificar modelos del álgebra que resuelvan y/o modelen un problema dado.</td><td>7.</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Resolver</td><td>Habilidad del alumno para resolver un problema matemático.</td><td colspan="2">Procedimental</td><td>1.</td></tr>
<tr><td rowspan="6"></td><td rowspan="4">Contextual</td><td rowspan="4">Problema al modelo</td><td>1.</td></tr>
<tr><td>1a.</td></tr>
<tr><td>1b.</td></tr>
<tr><td>1c.</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Modelo al problema</td><td>1a.</td></tr>
<tr><td>1b.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Total de especificaciones de la prueba</td><td>14 reactivos.</td></tr>
</table>

*Fuente: adaptación de Vargas (2017)*.

### *Criterios de valoración*

Dado el enfoque de evaluación utilizado en el proceso de recolección de los datos, en lugar de usar criterios de calificación se consideró pertinente trabajar con criterios de valoración, en tanto que la intención de la evaluación no fue con fines de calificar el desempeño de los estudiantes, sino de describir el aprovechamiento reflejado en sus respuestas; dichos criterios se construyeron a posteriori, considerando como base las respuestas emitidas por los estudiantes y los objetos a evaluar establecidos en los criterios de evaluación, en estricta referencia al programa de estudios vigente de la asignatura Álgebra Superior.

En la tabla siguiente se muestran, a modo de ejemplo, los criterios de valoración para las dos primeras preguntas.

***Tabla 3. Criterios de valoración.***

| Objeto | Pregunta | Criterios de valoración |
|---|---|---|
| Identificar | 1.a, 1.b, 1.c, 1.d, 1.e, 1.f, 1.g | 0.No contesta<br>1. Explicita que no comprendió la instrucción<br>2. Explicita que no sabe cómo resolverlo<br>3. Propone una solución incorrecta<br>4. Solución correcta. |
| Aplicar | 2 | 0. No contesta<br>1. No comprendió la instrucción.<br>2. Comprende la instrucción y no sabe cómo proceder.<br>3. Coloca una solución incorrecta sin procedimiento.<br>4. Identifica el procedimiento pero no sabe cómo proceder.<br>5. Desarrolla el procedimiento adecuado, pero llega a un resultado incorrecto<br>6. Desarrolla el procedimiento adecuado y lo deja inconcluso.<br>7. Desarrolla el procedimiento adecuado y lo termina. |

*Fuente: elaboración propia.*

***Parrilla de evaluación***

La estrategia de análisis de los datos corresponde al instrumento denominado parrilla de evaluación, en este caso se hizo una adaptación de la propuesta de Sanmartí. Este instrumento contiene los criterios de referencia para organizar y analizar los desempeños de los estudiantes, facilitando la interpretación de los resultados obtenidos en el instrumento de recolección de información (examen).

La lectura horizontal permite obtener un análisis individual de cada estudiante evaluado, localizando de manera puntual los aciertos y dificultades de este. Por su parte, la lectura vertical proporciona una valoración a nivel de reactivo; con el fin de detectar los contenidos y procedimientos con menor y mayor dificultad.

A continuación, se muestra un ejemplo del modelo utilizado en esta investigación.

***Tabla 4. Modelo de parrilla de evaluación.***

| **Alumno** | **Descripción/definición** | | | | | | | | | | | | | | | | | | | **Total** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1. Identificar | | | | | | | 2. Resolver | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | 2.1 Proc. | 2.2 Contextual | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | P-M | | | | | | | | | M-P | | |
| | 1 a | 1 b | 1 c | 1 d | 1 e | 1 f | 1 g | 2a | 3 | | | 4a | 4b | | 4c | | | 5ª | 5b | |
| | | | | | | | | | M | R | P | | LA | P | M | R | P | | | |
| E1 | 3 | 4 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 0 | **30** |

Fuente: elaboración propia.

Para realizar la interpretación de los datos contenidos en la parrilla de evaluación, se procede primero con la lectura horizontal, en este caso corresponde a los puntajes a nivel estudiante, lo cual permite ubicar los aciertos y dificultades; en un segundo momento se efectúa la lectura vertical, obteniendo un análisis a nivel reactivos (contenidos) acción que permite localizar las dificultades y aciertos a nivel de contenidos asimilados y no asimilados.

### *Reactivos integrados en el instrumento*

Los criterios especificados en la tabla 2, son el recurso con el cual se diseñaron los reactivos del examen, los ejercicios propuestos fueron adaptados de Friedberg (1982), álgebra superior; Jagdish C. Arya Robin W. Lardner (2002), matemáticas aplicadas y Earl W. Swokowsky (2011), álgebra y geometría analítica.

El examen o instrumento de recolección de datos contempló un total de 5 reactivos, 3 de estos se subdividieron en ejercicios (reactivos 1, 4 y 5), esto con la finalidad de explorar a profundidad el dominio de los contenidos y valorar el aprendizaje de los estudiantes. Cada reactivo se enfocó a valorar los aprendizajes en función de los contenidos enunciados en el programa de la asignatura. Los contenidos evaluados corresponden a: lógica matemática, sistema de ecuaciones, matrices, inversa de matrices, números reales, polinomios, espacios vectoriales, razonamiento lógico y sistema de ecuaciones lineales.

## Resultados

En la siguiente parrilla de evaluación se organizaron los resultados obtenidos a través del instrumento aplicado. Para su lectura, debe considerarse que en las primeras tres filas se especifican los aspectos generales (nombre, descripción, total), así como los dominios evaluados (identificar y resolver) y el sentido de aplicación de los reactivos (procedimental-contextual).

***Tabla 5. Parrilla de evaluación Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones.***

| **Alumno** | **Descripción/definición** | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | **Total** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1. Identificar | | | | | | | 2. Resolver | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | 2.1 Proc. | 2.2 Contextual | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | P-M | | | | | | | | | M-P | | |
| | 1a | 1b | 1c | 1d | 1e | 1f | 1g | 2a | 3 | | | 4a | 4b | | 4c | | | 5a | 5b | |
| | | | | | | | | | M | R | P | | LA | P | M | R | P | | | |
| IEE5 | 3 | 3 | 1 | 3 | 4 | 3 | 3 | 7 | 1 | 1 | 0 | 4 | 2 | 0 | 2 | 0 | 0 | 5 | 0 | **42** |
| IEE1 | 3 | 4 | 3 | 3 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 4 | 3 | **36** |
| IEE4 | 1 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 1 | 1 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 3 | **35** |
| IEE3 | 3 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 5 | 5 | **33** |
| IEE6 | 3 | 4 | 3 | 3 | 3 | 0 | 3 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | **26** |
| IEE7 | 3 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 3 | 0 | 0 | 3 | 0 | **24** |
| IEE2 | 3 | 4 | 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | **20** |

Fuente: elaboración propia.

La lectura horizontal de la parrilla de evaluación en el rango “puntajes altos (azul)” nos permiten establecer los siguientes resultados.

El estudiante 5 (Fila IEE5, columnas 3-P, 4b-P, 4c-R-P y 5b), presenta deficiencias en los contenidos de ecuaciones lineales, razonamiento lógico, sistema de ecuaciones lineales y polinomios. Obtuvo 0 puntos en los reactivos mencionados, la dificultad reside en el dominio procedimental.

El estudiante 1, muestra dificultades en los contenidos de razonamiento lógico (dimensión razonamiento) y sistema de ecuaciones lineales (dimensión respuesta y razonamiento). La dificultad principal localizada se relaciona con la habilidad del estudiante para traducir una situación matemática a un lenguaje algebraico y por consiguiente proponer una respuesta correcta.

El estudiante 4, refleja puntajes de 0 en: sistema de ecuaciones lineales (dimensión procedimiento), razonamiento lógico (en sus dos dimensiones, lenguaje algebraico y procedimiento) y sistema de ecuaciones lineales (dimensión, modelo, respuesta y razonamiento). La dimensión “procedimiento” es donde reside el mayor número de respuestas en 0, con esto observamos que la deficiencia concreta consiste en la ausencia de habilidades procedimentales para resolver problemas matemáticos contextualizados.

El estudiante 3, presenta dificultades (puntaje igual a 0) en los contenidos de sistemas de ecuaciones lineales (modelo, respuesta y procedimiento), razonamiento lógico (lenguaje algebraico y procedimiento), sistema de ecuaciones lineales (modelo, respuesta y procedimiento). Derivado de la ausencia de respuesta en las reactivos que valoran los contenidos antes mencionados; probablemente existe dificultad en la comprensión de las indicaciones o la inexistencia de habilidades para resolver problemas matemáticos de tipo contextuales.

Las dificultades concretas de este primer grupo de estudiantes se encuentran en los reactivos 3, 4a, ab, 4c, 5a y 5b. Los contenidos con los puntajes más bajos son los referidos a sistema de ecuaciones lineales, razonamiento lógico y ecuaciones lineales. Las habilidades a trabajar y fortalecer en los estudiantes son:

a) Utilización de herramientas matemáticas que permitan la resolución de problemas.

b) Realizar inferencias matemáticas a partir de un modelo dado.

c) Plantear modelos matemáticos que modelan situaciones concretas.

d) Escritura de problemas en lenguaje algebraico.

e) Diseñar problemas concretos a partir de un modelo dado.

f) Transferir modelos teóricos a situaciones prácticas.

Continuando con el análisis horizontal, en el rango "puntos bajos (verde)", se establecen los siguientes resultados:

El estudiante 6, obtuvo puntajes de 0 a 1 en los contenidos: polinomios (fila IEE6, columna 2a), sistema de ecuaciones lineales (fila IEE6, columna 3), polinomios (fila IEE6, columna 4a), razonamiento lógico (fila IEE6, columna 4b, dimensión P), sistema de ecuaciones lineales (fila IEE6, columna 4c, dimensiones M-R-P) y polinomios (fila IEE6, columna 5b). Según los criterios de evaluación establecidos, la valoración los contenidos enlistados corresponde al criterio "no contesta" (puntaje 0), en este caso la inexistencia de respuesta puede interpretarse como falta de comprensión del problema o nulo conocimiento del tema.

El estudiante 7, refleja dificultades de índole conceptual en los reactivos 1c al 1f, proyecta puntajes con valores de 0. De igual manera refleja puntajes con valor de 0 en los ejercicios de tipo procedimentales, concretamente en los contenidos de: sistemas de ecuaciones lineales (fila IEE7, columna 3, M-R-P), polinomios (fila IEE7, columna 4a), razonamiento lógico (fila IEE7, columna 4b, P), sistemas de ecuaciones lineales (fila IEE7, columna 4c, R,P) y polinomio (fila IEE7, columa 5b). La particularidad de este estudiante es que presenta dificultades en los dominios identificar y resolver, con lo cual observamos que sus carencias abarcan los dominios conceptuales y procedimentales al momento de aprender contenidos de álgebra superior.

Por último, tenemos al estudiante 2, sus carencias se centran de igual manera que el anterior en el dominio conceptual, aunque en menor grado, ya que sólo dos reactivos reflejan puntaje de 0 (matrices y espacios vectoriales). La dificultad más apremiante se localiza en el dominio "resolver-contextual", los contenidos con puntaje de 0 corresponden a sistema de ecuaciones lineales (fila IEE2, fila 3 M-R-P), polinomios (fila IEE2, fila 4a), razonamiento lógico (fila IEE2, columna 4b, LA-P), sistema de ecuaciones lineales (fila IEE2, columna 4c, R-P), sistema de ecuaciones (fila IEE2, columna 5ª) y polinomio (fila IEE2, columna 5b).

En resumen, los datos mostrados permiten localizar las dificultades principales de este grupo de estudiantes, las cuales tienen que ver con el dominio conceptual, es decir, hay deficiencia para reconocer teóricamente las herramientas matemáticas para resolver un problema típico de álgebra superior; reafirmando el principio teórico que establece la importancia del dominio conceptual como base para para lograr un buen desempeño a nivel procedimental. Por otro lado existe deficiencias profundas en la resolución de problemas contextuales en el contenido de sistemas de ecuaciones lineales, razonamiento lógico y polinomios, hay ausencias de habilidades para reflexionar, resolver y diseñar problemas matemáticos a partir de ciertos datos proporcionados.

### *Análisis vertical*

Con la finalidad de proporcionar una lectura a nivel grupal e identificar las dificultades a nivel contenido y habilidad, se presenta la lectura vertical de la parrilla de evaluación, centrado en el análisis de los resultados obtenidos en cada ejercicio propuesto.

***Tabla 6. Resultados a nivel reactivo.***

| | Reactivos | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **1a** | **1b** | **1c** | **1d** | **1e** | **1f** | **1g** | **2a** | **3** | | | **4a** | **4b** | | **4c** | | | **5ª** | **5b** |
| | | | | | | | | | *M* | *R* | *P* | | *LA* | *P* | *M* | *R* | *P* | | |
| **P. O** | **19** | **24** | **14** | **18** | **17** | **11** | **17** | **26** | **4** | **4** | **1** | **9** | **7** | **0** | **10** | **0** | **0** | **26** | **11** |
| **P. E** | 28 | 28 | 28 | 28 | 28 | 28 | 28 | 49 | 21 | 21 | 21 | 35 | 49 | 49 | 21 | 21 | 21 | 35 | 35 |

Tomando como referente los puntajes obtenidos en cada reactivo se obtienen los siguientes resultados grupales.

Los reactivos 1a -1g se enfocaron en valorar los contenidos de: lógica matemática, sistema de ecuaciones, matrices, inversa de matrices y números reales; proyectan resultados relativamente aceptables, ya que en su mayoría logran el 50% del puntaje esperado, a excepción del reactivo 1f que solo obtuvo 11 puntos de 28 posibles. Por lo tanto, se puede decir que existen dificultades relativas en los conocimientos sobre herramientas matemáticas.

El reactivo 2a valoró el contenido de polinomios (factorización), el puntaje máximo posible corresponde a 49, se obtuvo 26 (53%). Con esto observamos que no se logra un puntaje satisfactorio, lo cual nos indica que existen deficiencias en la factorización, uso de teoremas y propiedades algebraicas.

El reactivo 3 (sistema de ecuaciones lineales) en sus subdivisiones modelo, respuesta y procedimiento refleja 4 y 1 puntos respectivamente de 21 puntos posibles (columna 3, filas P.O y P.E), con lo cual se infiere que el grupo presenta deficiencias en la aplicación de proporciones para obtener los resultados de un problema.

El reactivo 4a (polinomios) se obtuvo 9 de 35 puntos posibles, con esto se afirma que existen serias dificultades del grupo de estudiantes para establecer modelos matemáticos para los problemas que se les proponen, a su vez esto se vincula con la ausencia de un pensamiento algebraico.

El reactivo 4b en sus dimensiones lenguaje algebraico y procedimiento proyecta 7 y 0 puntos respectivamente, de 49 puntos posibles; es en este reactivo donde se ubica la mayor deficiencia del grupo, ya que existen dificultades para el razonamiento algebraico y la formulación de procedimientos para encontrar un tercer dato a partir de dos datos proporcionados.

Por otra parte, el reactivo 4c, en sus dimensiones modelo, respuesta y procedimiento; refleja 10 y 0 puntos de 21 posibles. Al igual que el reactivo 4b es aquí donde se encuentran las deficiencias más profundas del grupo, relacionados con los contenidos y habilidades para establecer un modelo matemático que resuelva un problema a partir de ciertos datos proporcionados.

En los reactivos 5a y 5b, de igual modo que el anterior, muestra severas deficiencias para diseñar un problema matemático contextual a partir de un modelo dado.

En resumen, el análisis vertical de la parrilla de evaluación revela que a nivel grupal los estudiantes de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones presentan deficiencias menores en la habilidad para identificar las herramientas matemáticas que dan solución a determinados problemas planteados. Sin embargo, los reactivos 4b, 4c, 5a y 5b dan cuenta de las dificultades profundas que presenta este grupo de estudiantes para resolver problemas que demandan la transferencia y contextualización del conocimiento al desarrollar modelos matemáticos que den solución a problemas relacionados con razonamiento lógico, sistema de ecuaciones lineales y polinomios.

## Conclusiones

El objetivo de esta investigación fue detectar las dificultades que los estudiantes de ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones; de la Universidad La Salle Oaxaca, tienen en contenidos del álgebra superior después que han tomado dicho curso. El argumento en que se fundamenta este trabajo sostiene que la evaluación criterial es un recurso invaluable para realizar procesos de evaluación enfocados en visibilizar los progresos, aciertos y dificultades en el aprendizaje de los estudiantes.

La realidad nos confirma una vez más que profesores y estudiantes tienen concepciones tradicionales muy arraigadas sobre la evaluación del aprendizaje, cuestión que repercute directamente en las prácticas evaluativas que se desarrolla en el aula. Profesores con un bagaje teórico suficiente y actualizado; sin embargo, su práctica no corresponde con una evaluación que promueva el aprendizaje de los estudiantes. La evaluación sigue efectuándose con fines de calificación y acreditación, pesa la dimensión administrativa por encima de la pedagógica.

Este trabajo logra mostrar que la evaluación criterial es un enfoque que resignifica el sentido pedagógico de la evaluación del aprendizaje, ya que, a partir de la metodología que posibilita es factible conocer las áreas del aprendizaje en el cual los estudiantes manifiestan dificultad; así como identificar el tipo de contenidos que resulta de mayor complejidad al momento de aprender contenidos matemáticos. Es importante enfatizar que los criterios de evaluación derivados de la revisión del programa de estudios, permitieron el establecimiento de criterios mínimos que se sometieron a juicio evaluativo a través del instrumento de recolección de información.

Tomando como referente los estándares mínimos (criterios de evaluación) estipulados, se encontró que los estudiantes de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones manifiestan dificultad en el dominio de conocimientos factual-conceptual, los contenidos del programa de estudios que reportan menor dificultad son: sistema de ecuaciones lineales, polinomios y razonamiento lógico. Asimismo se constató que las dificultades más pronunciadas (según los puntajes) se concentran a nivel procedimental, en tanto, que los errores y deficiencias se ubican en los ejercicios que valoran la capacidad del estudiante para aplicar el conocimiento a una situación contextual; aunque es preciso enunciar que el dominio procedimental se evaluó en dos dimensiones, la primera se enfocó en la habilidad del estudiante para aplicar un procedimiento a una situación contextual dentro del campo del álgebra superior y la segunda valoró la habilidad para construir un problema a partir de un modelo dado. De los dos razonamientos propuestos al primer grupo de estudiantes la dificultad apremiante se ubica en el último dominio.

Por otro lado, se consideran los tópicos con menor dificultad como aprendizajes en proceso de consolidación, estos corresponden a lógica matemática, sistema de ecuaciones, matrices, números reales y espacios vectoriales, todos en su dimensión conceptual. En cuanto, a las habilidades procedimentales, se observa que las representaciones mentales y estrategias de solución desarrolladas por los estudiantes tienen una connotación netamente mecánica, es decir, se sujetan a los procedimientos aprendidos en los ejercicios resueltos en clase.

La siguiente matriz muestra un panorama integrado de los dominios logrados y las dificultades en los estudiantes.

| Tópicos | Dominio significativo | Mayor dificultad | Dificultad profunda | |
|---|---|---|---|---|
| | | Conceptual | Procedimental | |
| | | | Lineal | Contextual |
| **INGENIERÍA ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES (LIE 101)** | | | | |
| Lógica matemática | * | | | |
| Sistema de ecuaciones. | * | | | * |
| Matrices. | * | | | |
| Inversa de matrices-matrices. | * | | | |
| Números reales | * | | | |
| Espacios vectoriales. | * | | | |
| Sistema de ecuaciones lineales. | | | * | * |
| Polinomios | | | * | |
| Razonamiento lógico | | | * | |

Las deficiencias reflejadas a nivel procedimental podrían no corresponder exclusivamente a los estudiantes, pueden ser producto de varios factores implicados en el proceso de aprendizaje; un elemento determinante podría ser la didáctica empleada por los docentes al momento de desarrollar los contenidos matemáticos, si a esto le sumamos la importancia de basarse en una didáctica de las ciencias, la repercusión es ampliamente influyente. Concretamente, influyen los tipos de tareas y actividades a partir del cual los estudiantes se apropian de los contenidos matemáticos, si los docentes enseñan de manera mecánica, los estudiantes se enfocan en memorizar los procedimientos; de allí que cuando enfrentan procesos que invierten o modifican la lógica de la tarea, la probabilidad de éxito es mínima o nula.

Otro factor vinculado con las prácticas de evaluación desarrollados en el aula, una evaluación con sentido pedagógico debería centrarse en visualizar los avances y dificultades y corregirlos en el momento; evitando la agudización de las deficiencias y sobre todo asegurarse de que el estudiante cuente con los estándares mínimos para transitar de un contenido a otro.

Los hallazgos encontrados en este trabajo encuentran un eco con procesos de investigación realizados en otros contextos y niveles. Alcaraz (2003), en un estudio efectuado en estudiantes de enseñanza obligatoria, cuyo objetivo se enfocó en reconocer el rendimiento de los estudiantes en contenidos matemáticos a través de un modelo de evaluación criterial; pudo comprobar que su desempeño mejoró con respecto al grupo de control, en el cual se evalúo de manera tradicional. De igual modo las calificaciones asignadas por los docentes fueron superiores y objetivas respecto al grupo evaluado de manera tradicional, en tanto que los docentes contaron con evidencias válidas para sustentar dicha valoración.

Otros resultados obtenidos mediante el modelo de evaluación criterial considerando la perspectiva de los padres de familia y docentes involucrados en el estudio refieren que la metodología implementada (enfoque criterial) representó un avance importante en el tratamiento de las dificultades de aprendizaje de sus hijos, aumento en el rendimiento académico, evitar parcialmente la dependencia de los libros de texto, tratar más científicamente los apoyos y refuerzos otorgados.

Reafirmar con otros estudios los resultados obtenidos en este trabajo permite visualizar la necesidad de transformar las prácticas de evaluación que aun siguen arraigadas en las aulas de casi todos los niveles educativos. Si se quiere transformar la educación se debe transformar la evaluación dentro de las aulas.

De las dificultades encontradas en los tres grupos de estudiantes es importante enfatizar que el dominio que hace falta consolidarse es el referente a las habilidades procedimentales. Según Arroyo (2014)

> …las dificultades en el aprendizaje de contenidos matemáticos pueden agruparse en cinco categorías: complejidad de los objetos matemáticos, procesos de pensamiento matemático, procesos de enseñanza, procesos de cognición y actitud afectiva y emocional hacia la matemática (pp.18-19).

En función de los resultados obtenidos en esta tesis y el procedimiento desarrollado por los estudiantes ante los ejercicios propuestos, indudablemente la dificultad de tipo procedimental está asociada a los procesos de enseñanza vividos y los procesos de pensamiento matemático ejecutado. El mismo autor, desarrolló un estudio enfocado en analizar las dificultades de un grupo de estudiantes al aprender el tema resolución de problemas algebraicos modelados mediante ecuaciones lineales con una incógnita; dentro de los resultados obtenidos constató que la enseñanza poco contextualizada de los problemas que se resuelven con ecuaciones lineales es uno de los factores influyentes, problemas ajenos a la realidad, no dominar temas previos trabajados en otros niveles y el razonamiento mecánico para resolver contenidos matemáticos.

En definitiva, los resultados obtenidos son un insumo valioso para reorientar las estrategias de enseñanza, diseñar cursos remediales y diseñar materiales didácticos orientados a superar las deficiencias encontradas. Asimismo, nos invitan a revisar el material y didáctica empleado en la enseñanza de la asignatura Álgebra Superior y caracterizar las prácticas evaluativas desarrolladas.

## Referencias

Alcaraz, F. D. (2003). *Un modelo de evaluación criterial para el área de Matemáticas en la Enseñanza Obligatoria.* Ensayos: Revista de la Facultad de Educación de Albacete, (18), 225-244.

Arroyo, G. C. (2014). *Dificultades en el aprendizaje de problemas que se modelan con ecuaciones lineales: El caso de estudiantes de octavo nivel de un colegio de Heredia. Uniciencia*, *28*(2), 15-44.

Arya, J. C., y Lardner, R. W. (2002). *Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía.* Pearson Educación.

Díaz, A. F., y García, J. J. G. (2004). *Evaluación criterial del área de matemáticas.* Educación.

Friedberg, S. H., Insel, A. J., y Spence, L. E. (1982). *Álgebra lineal.* Publicaciones Cultural.

Hernández, S. R., Fernández, C., y Baptista, L. P. (2014). Metodología de la investigación. México: Editorial Mc Graw Hill.

Plan LIE (2017). *Programa de Estudios vigente de álgebra superior de la carrera en Ingeniería en Electrónica y Telecomunicaciones.* Universidad de Lasalle Oaxaca.

Reyes, F. P., Vargas, X. N. y Martínez, C. C. (2017). Análisis del uso de la x, zh, ë y saltillos (') en la escritura del idioma Zapoteco en alumnos de un bachillerato del estado de Oaxaca, México. Memorias de las Jornadas Académicas de Didáctica de las Ciencias 2017. México: Instituto Politécnico Nacional.

Stufflebeam, D. L., y Shinkfield, A. J. (1985). Evaluación sistemática: guía teórica y práctica. Paidós.

Swokosky, E. W. (2011), *Álgebra y trigonometría.* Cengage Laerning Editores.

Vargas, X. N. (2018). *Un acercamiento a las dificultades en el aprendizaje de álgebra superior desde el punto de vista de la evaluación criterial: El caso de estudiantes de ingeniería de una universidad de Oaxaca México*. Memoria del 1º Congreso Mundial de Educación, Educa. Universidad de A Coruña. España.

Vargas, X. N. (2007a): U*na evaluación del aprendizaje en la escuela primaria Xaam [Disco compacto].* XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Eds. Mancera, E., Pérez, C. Querétaro: Benemérita Escuela Normal de Querétaro. Querétaro, México. ISBN. 978-968-9166-01-6.

# Implementación de tecnologías computacionales en el ámbito laboral dentro de la ingeniería matemática. Estudio de caso

José Hardi Romero Mendoza, Ramon Sebastian Salat Figols
hardirmh@gmail.com

**Resumen**

En los últimos años el uso de la tecnología computacional ha tomado enorme relevancia en casi todos los campos de las ciencias, y no es de asombro pues la rápida evolución de los sistemas computacionales ha ido a la par de grandes descubrimientos y mejoras en la vida cotidiana. Este trabajo forma parte de los avances de una tesis en el cual se plantea conocer el conjunto de programas computacionales que utilizan los alumnos de ingeniería matemáticas de la Escuela Superior de Física y Matemáticas, así como el nivel de uso que perciben tener y los problemas que presentan durante el aprendizaje de estas tecnologías.

**Palabras clave**

Tecnologías computacionales. Problemas. Importancia. Aprendizaje.

## Introducción

En los avances tecnológicos, resalta enormemente el desarrollo de aquellos programas computacionales que pueden ser utilizados en la realización de tareas para las cuales no se estaban pensados originalmente, y que su uso profesional ha permitido transformar a cierto conjunto de tareas complejas en tareas simples que pueden ser realizadas desde la comodidad de un escritorio, o desde la palma de la mano. Entre este tipo de tareas se vislumbran aquellas que, bajo el uso de estos programas, pueden ser transformadas para permitir una mejor comprensión sobre el fenómeno de estudio dentro de las aulas de clase y en el ámbito laboral. El presente trabajo forma parte de una investigación de tesis que muestra un análisis sobre la importancia del uso de los programas computacionales, en el que se pretende responder a las preguntas de investigación:

- ¿Cuáles son los programas computacionales utilizados con mayor frecuencia por los profesores para impartir sus clases, y bajo qué objetivos los utilizan?
- ¿Cuál es la percepción que tienen de sí mismos los alumnos, en cuanto a sus conocimientos en estos programas?
- ¿Conocen los alumnos la importancia del buen manejo de programas computacionales como parte de su formación profesional?
- ¿Cuáles son los obstáculos que se les presentan a los alumnos de esta escuela para el aprendizaje de programas computacionales?

En este se plantea un breve repaso de la historia computacional para conocer cómo ha evolucionado a la par del hombre; una recopilación de resultados obtenidos en la enseñanza matemática a través del uso de programas computacionales; el planteamiento de problemas más relevantes que deben de tomarse en cuenta para el aprendizaje de los programas computacionales; y un estudio de caso en el que se analizan las perspectivas que tiene un grupo de estudiantes universitarios respecto su uso para su desarrollo estudiantil y profesional.

## Marco Teórico

*Breve historia de la computadora y los programas computacionales*
Según Ceruzzi (2018), el parteaguas en los artefactos que ayudaron al desarrollo de la era moderna podemos encontrarlo en el telar de Joseph Jacquard, el cual hacia uso de tarjetas perforadas para su automatización de patrones en la tela. Este invento daría paso a la invención de la maquina analítica de Charles Babbage en 1835, la cual era capaz de realizar cálculos de funciones logarítmicas, polinómicas, entre otras; y a su vez, sería la precursora del concepto de computadora y de software. Sin embargo, hacía falta un elemento esencial para ser considerada como computadora moderna en todo sentido: el almacenamiento y manipulación de información de datos de forma automatizado. Esto no ocurriría hasta la invención del tabulador electromagnético de tarjetas perforadas, de Herman Hollerith, en 1889, invento que posteriormente ayudaría a la construcción de Electronic Discrete Variable Automatic Computer (EDVAC) o Computadora Electrónica de Variable Discreta.

EDVAC fue diseñada en 1945 por John Von Neumann, motivado por la realización de muestreos estadísticos para la solución a un problema, implementando las técnicas de computación de su época en el proceso de Monte Carlo (Eckhardt,1987). Entró en operación en 1952, siendo capaz de resolver ecuaciones diferenciales parciales no lineales y representando un gran cambio a las computadoras precursoras al prescindir de una programación a nivel de circuitos para la realización de tareas, requiriendo solo una modificación en su memoria para poder ejecutarla, a lo que actualmente se le conoce como software (Salat, 2013).

Todos estos eventos darían paso a la conformación de International Business Machines (IBM), empresa donde se desarrolló el primer lenguaje de programación de alto nivel conocido comúnmente como Fortran (Formula Translating System), en 1954, y a la ampliación de la era digital.

El inicio de la era digital está marcado por el desarrollo de la segunda guerra mundial, con la introducción del telégrafo, las máquinas subsecuentes a este, la introducción de dicho termino, haciendo alusión al conteo con dígitos a través de pulsaciones eléctricas, y los eventos posteriores a la guerra. En tales eventos se buscaba mejorar el sistema de defensa de E. U. interconectando las computadoras de todo el país, dando paso así al internet y a las computadoras precursoras del modelo personal de escritorio. Es a partir de estos sucesos, y de la llegada de Fortran, cuando la interacción entre hombre y maquina empieza a tomar otro sentido, pues ya solo bastó con conocer el lenguaje de programación y la adquisición de un poco de ingenio para iniciar con la creación de nuevos programas a la medida de sus necesidades. Sería, pues, la programación, a través de lenguajes de alto nivel, la base fundamental de gran parte de los programas existentes hoy en día, y el inicio de nuevas áreas de estudio sobre los efectos cognitivos que esta práctica proporcionaba.

*Importancia del aprendizaje de los programas computacionales*.
Parte de las importancias del manejo de programas computacionales, para el desarrollo profesional, son aquellas características que transforman el actuar y

el quehacer del egresado inmerso en el sector de la investigación, industrial y financiero. Pues es de esperarse que una tarea de magnitud significante, ayudada por programas computacionales, cambie en cuanto a su forma, más no en su objetivo final. Es decir, los objetivos de las tareas a realizar, que puedan tener por mediador algún programa computacional, también podrían ser logrados sin ayuda de dichos medios, sin embargo, es evidente la ventaja que se tiene trabajar con estas herramientas.

Por lo anterior, se considera importante saber el cómo transforman los programas computacionales el quehacer laboral, comprendiéndose también el posible cambio en la cognición de quien aprende uno.

*¿Cómo transforman las habilidades del estudiante los programas computacionales?*

Era de esperarse que la computadora, y los programas que pueden ser utilizados en ella, trajeran consigo cambios importantes en las estructuras cognitivas de los usuarios al tratarse de objetos con particularidades de uso. Esta conclusión se perfila en la misma forma de referirse a ellos y en una generalización del concepto "artefactos", entendido como un dispositivo artificial que cambia la naturaleza de las tareas sobre las cuales se utiliza y que, en conjunto con sus propiedades, estas tareas y las habilidades del usuario puede mejorar sus capacidades cognitivas, (Norman, 1991). Sin embargo, si bien esta posibilidad, en ocasiones, llega a convertirse en un hecho a base de un conjunto de eventos fortuitos, el control sobre los eventos particulares, que dan paso a estas mejoras cognitivas, es lo que permite transformar a un objeto, con ambigüedades de uso, en un objeto con funciones claras y distinguibles, unas de otras, para el usuario. Esta transformación del objeto es mejor conocida como instrumentalización, que según (Drijvers y Trouche, 2008) puede definirse como el proceso por el cual el usuario transforma al artefacto en instrumento.

El control de los eventos, dentro del ámbito estudiantil, se encuentra estrechamente ligado con el desarrollo didáctico por el cual pasa el alumno, pues es requerido que el alumno interactúe con la máquina y los programas computacionales dentro de un ambiente, hasta cierto punto, controlado por el profesor para moverlo a situaciones de solución a problemas en donde requiera explorar los atributos de dichos programas, introduciéndose en el proceso al que Drijvers y Trouche (2008) denominan instrumentación. En el cual, motivado por la tarea, el artefacto y sus atributos, el usuario genera las nuevas estructuras cognitivas que le permitirán transformar al objeto, o artefacto, en instrumento.

Un ejemplo, de cómo el uso de algunos programas computacionales puede cambiar la cognición de los alumnos, es el uso del lenguaje de computación "Logos". Este sirve para trazar líneas en el entorno de desarrollo, a través de comandos básicos que asemejan a instrucciones dadas a una persona para que realice un dibujo sobre una hoja de papel puesta en una mesa, teniendo un lápiz en mano. Entre los resultados de investigaciones sobre los cambios y logros que se pueden obtener a través de este lenguaje se encuentran, mejoras en el rendimiento matemático, particularmente en la adquisición de conceptos geométricos (Emihovich et. Al. 1988), (Battista y Clements 1990); y mejora en la creatividad, originalidad y habilidad de resolución de problemas figurativos (Silvern, 1988), (Pardemean y HONNI, 2011), (Clements, 1991). Aunque, si bien las investigaciones que proporcionan estos resultados están enfocadas a niños no mayores de 10 años, muestran resultados significativos en cada una de ellas. Más aún, en el sentido de la teoría de Piaget sobre la función simbólica, refuerza la idea de que el uso de programas computacionales, en la actualidad, es esencial para comprender con mayor rapidez cierto conjunto de conceptos. Sin embargo, estos ejemplos planteados solo muestran un sesgo del potencial del uso de los programas de computadora, en cuanto a programas del carácter geométrico espacial.

Las facilidades que pueden proporcionar los programas de computadora para la asimilación de conceptos algebraicos y aritméticos, permiten un ambiente, según lo anteriormente expuesto, en el cual se pueden desarrollar habilidades que son requisito indispensable para un excelente desarrollo profesional. A su vez, promueve un ambiente para un mejor desarrollo intelectual al permitir la manipulación de objetos virtuales que simulan las características geométricas, aritméticas o algebraicas de objetos reales, y que dan pie a la comprensión de una mayor cantidad de conceptos, y a ampliar las fronteras del conocimiento del estudiante, en un menor lapso de tiempo, siempre y cuando se cuenten con las habilidades necesarias para el correcto uso de algún programa en cuestión (Tristancho, Vargas y Contreras, 2019) (Camacho, Caldera y Valenzuela, 2019).

*Dificultades en el uso de programas computacionales*

Como ya se mencionó, se requiere de una instrumentalización sobre el uso de programas computacionales, proceso por el cual estos programas pasan a formar parte del repertorio de herramientas de un individuo. Como ejemplo, nótese que, para poder aprender correctamente a escribir con bolígrafo, muchas veces se requiere de un periodo de practica y adaptación al nuevo artefacto, aun y cuando ya se sepa escribir correctamente con lápiz. Esto ocurre debido a que ha cambiado el artefacto con el cual se interactúa para llevar a cabo la tarea. De la misma forma, el paso a los medios computacionales presenta un cambio nada despreciable en las formas de trabajo, pues, se es requerido, no solo pensar en el problema a tratar, sino también en cómo darle las ordenes correctas al computador para obtener lo deseado. Esto representa un nuevo paradigma en la forma de trabajar, en donde se tiene de por medio un artefacto que requiere de conocimientos sobre su uso, trayendo consigo ciertas dificultades que se deben tener en cuenta al realizar la implementación de programas computacionales (Drijvers, 2000) (Drijvers y Trouche 2008), que pueden ser catalogadas como económicas, sociales y cognitivas, y que a continuación se presentan algunos aspectos relevantes de estas.

*Dificultades económicas*

Estas refieren a la dificultad de acceso a los medios computacionales, principalmente a algún artefacto que permita la ejecución de programas computacionales como una computadora de escritorio, portátil, tableta electrónica, teléfono inteligente, etc. Pero también puede ser considerado como parte de estas dificultades el acceso a determinado programa computacional, ya sea por el costo de activación o bien por el costo de adquisición, el cual puede contemplar la compra total o parcial de algún dispositivo como disco compacto, USB o medio de descarga vía internet.

*Dificultades sociales*

En estas dificultades se engloban todas a aquellas que, pese a tenerse el conocimiento de manejo y acceso a los medios adecuados para el aprendizaje, enseñanza o practica de los programas computacionales, no permiten su adecuado desenvolvimiento en favor de la adquisición y desarrollo de las habilidades del sistema hombre-tarea-artefacto (Norman, 1991). Estas pueden ser: tiempo, ausencia de la concepción de la importancia de su uso, ausencia de programas de enseñanza diseñados para su uso y ausencia de un entorno idóneo (Drijvers, 2015).

*Dificultades cognitivas*
Estas, en esencia, pueden resumirse en aquellos obstáculos cognitivos que pueda tener un usuario para apropiarse del entorno computacional. Para fines prácticos, solo se hará énfasis en las dificultades de aprendizaje de los programas computacionales y las dificultades de adaptación a medios digitales.

En cuanto a las dificultades de aprendizaje, el problema que más resalta a la luz es el de la pseudo-transparencia y la doble referencia (Artigue, 1997. Citado por Drijvers y Trouche, 2008). Refiriendo al primero como "la brecha entre lo que un estudiante escribe en el teclado y lo que aparece en la pantalla" pues no se puede tener una manipulación directa de los objetos digitales, mientras que el segundo refiere las dos perspectivas relacionadas a las tareas a realizar en un entorno de enseñanza, la del profesor y la del alumno.

Por otra parte, las dificultades cognitivas de adaptación a los medios computacionales, en la relación alumno-profesor, están estrechamente relacionadas a la misma interacción entre estos, con mayor precisión a la "orquestación instrumental" que permite la apropiación del medio computacional del alumno (Trouche, 2004), (Drijvers y Trouche, 2008), refiriéndose a esta como la forma en la que el profesor usa los diversos artefactos disponibles para lograr tal objetivo en el alumno. Quedando sobre entendido que un sistemático, intencionado y organizado uso de los medios computacionales en el entorno sobre el cual se desenvuelve el alumno, puede permitir una adaptación más rápida a los mismos.

**Metodología**

La metodología de estudio, esta es mayormente cualitativa, debido a que permitirá responder con mayor eficacia las preguntas de investigación planteadas. Permitiendo profundizar, por ejemplo, en sus percepciones sobre el estado en el cual se encuentras respecto al manejo de programas computacionales.

*Obtención de información*
Para la obtención de información se diseñó un cuestionario que fuere respondido por alumnos pertenecientes a la ingeniería matemática.

Contempló seis preguntas, de las cuales, cuatro eran de respuesta libre y dos eran de respuestas mixtas (libre y de selección), de tal modo que se buscó obtener la mayor información relevante de los encuestados, en relación a:

a) Tiempo de experiencia en el uso de un computador.
b) Dificultades en el manejo de programas computacionales.
c) La concepción que tienen sobre el uso del computador en la ingeniería, tanto en el ámbito estudiantil como laboral.

d) Los tipos de programas computacionales que conocen, y el nivel que conciben tener bajo la siguiente escala.
   1. No conozco el programa, o solo he escuchado hablar de él.
   2. Identifico cierto tipo de problemas que puedo resolver con el programa.
   3. Si me dan un problema, sé que este programa me sirve para resolverlo, y podría resolverlo, aunque con dificultad (ayudándome de apuntes, con prueba y error, etc.).
   4. Si me dan un problema, sé que este programa me sirve para resolverlo, y podría resolverlo sin dificultad (sin auxilio de notas, sin cometer tantos errores, etc.).
   5. Identifico los tipos de problemas que se puede resolver con este programa, se resolverlo sin dificultad con el mismo y conozco las ventajas y desventajas que tiene respecto a otros programas del mismo tipo.

El cuestionario fue apoyado bajo la información obtenida del marco teórico, conocimientos de los problemas comunes en las dificultades del trabajo con programas computacionales y un cuestionario alterno realizado a profesores.

El cuestionario aplicado a los profesores contempló cuatro preguntas, dos de respuesta libre y dos de selección múltiple, con las cuales se buscó tener una base de programas computacionales más usados en sus cursos para ingeniería dentro del mismo plantel, con dos objetivos principales:

1. Facilitar las respuestas al cuestionario de los alumnos con una tabla en la cual pudieran seleccionar los programas conocidos.
2. Obtener información que pudiere ser relevante para contrastar con las respuestas obtenidas en el cuestionario aplicado a los alumnos, considerando
   - El objetivo del uso de los programas computacionales.
   - El curso en el cual se aplicaba.
   - Las formas y tiempos en los cuales eran utilizados.

Ambos cuestionarios contaron con tiempo libre para su respuesta, y fueron expuestas las intenciones de los mismos a los encuestados.

Solo del cuestionario para alumnos se solicitó información personal, previendo una posible aplicación de entrevista. Dicha información personal se informó que era voluntario proporcionarla y que la misma sería utilizada solo para fines de contacto en relación con el cuestionario aplicado.

Cabe mencionar que los alumnos se mostraron un gran apoyo y concepción de lo importante que era el cuestionario para una posible mejoría su aprendizaje o el de sus compañeros de menor semestre. Ello se vio reflejado en la extensión del tiempo tomado para ser contestado, con un tiempo máximo de 63 minutos; en la confianza para aclarar cualquier duda que presentaron; en que todos proporcionaron sus datos personales de contacto y en las amplias respuestas proporcionadas.

*Muestra poblacional*

Se tomó un conjunto de 19 estudiantes, pertenecientes a la carrera de ingeniería en matemáticas con especialidades en ingeniería industrial e ingeniería financiera, de la Escuela Superior de Física y Matemáticas.

En cuanto al cuestionario alterno, fue realizado a doce profesores pertenecientes al plantel, de tal manera que fueran recurrentes en el uso de algún programa computacional para la impartición de uno o más cursos.

## Resultados

Parte de los resultados del cuestionario aplicado a los profesores se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 1.- Programas utilizados por profesores encuestados.

| **Programa** | **Cantidad de profesores que lo manifiestan utilizarlo** |
|---|---:|
| C++ | 6 |
| Excel | 4 |
| Mathematica | 4 |
| Latex | 3 |
| Python | 3 |
| Adobe Acrobat | 2 |
| C | 2 |
| Explorador Web | 2 |
| Geogebra | 2 |
| Hoja de calculo | 2 |
| Matlab | 2 |
| Octave | 2 |
| Scientific WordPlaces | 2 |
| Architect | 1 |
| Dev-C++ | 1 |
| Fortran | 1 |
| Mathlab | 1 |
| NxMaxima | 1 |
| Promodel | 1 |
| Pseint | 1 |
| R | 1 |
| WinEdit/latex | 1 |
| Winplot | 1 |
| Xcas | 1 |

A la vez se encontró que los mismos son utilizados en los cursos de Algebra II & III, Calculo I, II & III, Ecuaciones diferenciales I & II, Simulación I & II, Estadística, Informática, Programación Seminario de titulación, Seminario de modelación Industrial y métodos numéricos. Encontrando que el objetivo principal de su uso es el aprendizaje de los alumnos, bajo dos clasificaciones:

- Donde el aprendizaje está directamente relacionado con el uso del programa computacional
- Donde no cuentan con esta relación directa y pueden considerarse algún aprendizaje en consecuencia a través del uso de los programas.

En cuanto a los resultados encontrados en la aplicación del cuestionario a alumnos, parte de ello se muestran en la siguiente tabla.

| | | Programas mencionados | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | C | Geogebra | Maple | Minitab | Rstudio | SPSS | SQL | Excel | Mathematica | Mathlab | Octave | Python | Otros | Sumas |
| Cursos mencionados | Algebra II | | | | | | | | | | | | 1 | 2 | 3 |
| | Análisis matemático | | | | | | | | | | | | 1 | | 1 |
| | Calculo I | | 1 | | | | | | | 1 | | | | | 2 |
| | Calculo II | | 1 | | | | | | | | | | | | 1 |
| | Ecuaciones diferenciales ordinarias I | | | 1 | | | | | | | 1 | | 1 | | 3 |
| | Ecuaciones diferenciales ordinarias II | | | 1 | | | | | | | 1 | | 1 | 1 | 4 |
| | Ecuaciones diferenciales parciales I | | | | | | | | | | | | | 1 | 1 |
| | Ecuaciones diferenciales parciales II | | | | | | | | | | | | | 1 | 1 |
| | Estadística | | | | 2 | | 1 | 1 | 1 | | | | | 2 | 7 |
| | Estadística avanzada | | | | | 1 | 1 | | | | | | | | 2 |
| | Geometría | | | | | | | | | 1 | | | | | 1 |
| | Informática | | | | | | | | 1 | | | | 2 | | 3 |
| | Investigación de operaciones | | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | | 1 | 4 |
| | Métodos numéricos I | 1 | | | | | | | | 1 | 1 | 2 | 1 | | 6 |
| | Métodos numéricos II | 1 | | | | | | | | | | 1 | 1 | | 3 |
| | Optimización I | | | | | | | | | | | | | 1 | 1 |
| | Optimización II | | | | | | | | | | | | | 1 | 1 |
| | Optimización lineal | | | | | | | | | | | | 1 | | 1 |
| | Optimización no lineal | | | | | | | | | | | 1 | | | 1 |
| | Programación | | | | | | | | | | | | 1 | | 1 |
| | Sistemas financieros y comerciales | | | | | 1 | | | 1 | | | | | | 2 |
| | Sumas | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 4 | 4 | 5 | 10 | 10 | |

Tabla 2.- Sugerencias de usos de programas en algunos cursos

La tabla muestra las menciones realizadas sobre el programa computacional, en relación con el curso en el que los estudiantes sugieren que sería factible utilizarlo. La ponderación es dada de tal forma que indica el número de alumnos que coincidieron en que dado programa podría ser utilizado en cierto curso. En la columna “otros” se agruparon todas las menciones de cursos para los cuales no proporcionaron relación alguna con algún programa.

Bajo una lectura vertical de la tabla, los resultados sugieren que el lenguaje de computación Python es el más reconocido por los alumnos para ser utilizado en cursos como programación, optimización lineal, métodos numéricos I & II, ecuaciones diferenciales ordinarias I & II, análisis matemático y algebra II. A su vez, se sugiere que los cursos Optimización I & II, investigación de operaciones, estadística, ecuaciones diferenciales parciales I & II, ecuaciones diferenciales ordinarias II y algebra II podrían ser factibles de ser cursados con algún programa computacional como herramienta auxiliar del curso.

Mientras tanto, en una lectura horizontal, los resultados sugieren que los cursos de estadística y métodos numéricos I son los más reconocidos por los alumnos para poder utilizar herramientas como Minitab, SPSS, SQL, Excel o algún otro; y Excel, Mathlab, Octave y Python, para desarrollar los cursos respectivos.

## Conclusiones

Los resultados que se han analizado hasta el momento, y que se muestran en este trabajo, sugieren que existe un claro reconocimiento sobre la importancia del uso de programas computacionales, y los cursos sobre los cuales podrían ser implementados. Pero, es claro que existe algún factor, o conjunto de factores que impiden que sean utilizados, pues de no ser así no habría tantas sugerencias como se muestran en la tabla 2. Estos factores pudieran ser del mismo carácter que los mencionados como parte del marco teórico, o pudieren ser de algún carácter distinto.

## Referencias

Drijvers, Paul & Trouche, Luc. (2008). From artifacts to instruments: a theoretical framework behind the orchestra metaphor. K. Heid & G. Blume Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics, Information Age. Pag.363-392.

Norman, Donald A. (1991). Cognitive artifacts. Cambridge University Press.

Ceruzzi, Paul. (2018). Breve historia de la computación 1ra edición, español. Fondo de Cultura Económica. Pag 15-35.

Pardemean, Bens y Honni, Evelin. (2011). The Effect of Logo Programming Language for Creativity and Problem Solving. Bina Nusantara University Jl. Kebon Jeruk Raya No. 27, Indonesia. Pag. 151-156.

Emihovich, Catherine y Miller, Gloria. (1988). Efectos del logotipo y CAI en el logro, la reflexividad y la autoestima de los alumnos de primer grado de raza negra. The Elementary School Journal 88, no. 5. Pag. 472-487.

Silvern, S. (1988). Creativity through play with Logo. Childhood Education. Pag. 220-224.

Battista, M. y Clements, D. (1990). Research into Practice: Constructing Geometric Concepts in Logo. Arithmetic Teacher. Pag. 15-17.

Clements, D. (1991). Enhancement of creativity in computer environments. American Educational Research Journal No 28. Pag. 173-187.

Tristancho, Vargas y Contreras. (2019). Desarrollo de habilidades espaciales en estudiantes de ingeniería mediante CAD especializado. Scientia et Technica Año XXIV, Vol. 24, Vol. 24, No. 01. Universidad Tecnológica de Pereira.

Camacho, Caldera y Valenzuela. (2019). Fidelidad en el uso de app para la resolución de ecuaciones diferenciales. Revista apertura. Abril 2019. Volumen 11, número 1, pp. 74-89. Universidad de Guadalajara.

Drijvers, Paul. (2015). Digital technology in mathematics education: why it works (or doesn't).

Drijvers, Paul. (2000). Students encountering obstacles using a CAS. – In: International Journal of Computers for Mathematical Learning. pag. 189-209.

Trouche, Luc. (2004). Managing the Complexity of Human/Machine Interactions in Computerized Learning Environments: Guiding Command Process Through Orchestrations. International Journal of Computers for Mathematical Learning.

Salat, Ramón. (2013). La enseñanza de las matemáticas y la tecnología. Revista Innoación educativa, vol.13 no.62.

Eckhardt, Roger. (1987). Stan Ulam, John Von Neumann, and the Monte Carlo Method.

# La percepción de los estudiantes de bachillerato sobre las aptitudes de los hombres y mujeres en la física.

Paola Guadalupe Marín Ramírez[76], Luz María de Gpe. González Álvarez[77]
Paoladalu97@gmail.com

## Resumen

Este artículo habla de la percepción que tienen 80 estudiantes del Bachillerato sobre las aptitudes que deben de tener las personas dedicadas a la física haciendo distinción en las tanto los hombres como de las mujeres y si se encuentran compartiendo aptitudes entre ellos. Estos resultados obtenidos de un cuestionario aplicado a dichos estudiantes. Además, se hace una comparación de estos resultados con los de investigaciones semejantes.

## Palabras clave

Aptitudes, hombres, mujeres.

## Introducción

Actualmente la inserción de las mujeres a las ciencias experimentales ha aumentado en algunas de las carreras, pero se muestran resultados de que las que deciden hacer estudios en esta área, siguen sin elegir a la Física. En el caso de los hombres la situación es similar, pues, aunque los hombres predominan en la Física, comparado con otras carreras de la misma rama, se observa que esta sigue siendo poco favorita para su elección.

Es por ello que las autoras de este documento se dieron a la tarea de investigar las opiniones de 80 jóvenes estudiantes de bachillerato sobre la percepción que ellos tienen de la Física, a través de un cuestionario que incluía un total de 9 preguntas. En este documento solamente se darán a conocer los resultados de una de ellas, cuyo objetivo es conocer la percepción de los estudiantes acerca de las aptitudes que deben de tener las personas dedicadas a la física, y si estas son diferentes debido al sexo, para explicar la razón del predomino de los hombres en esta rama.

Para el análisis de los datos obtenidos, se tomaron las respuestas textuales de cada estudiante, se contrastaron con las aptitudes de los físicos reportadas en la literatura especializada, y con esta información se elaboró una red sistémica.

[76] Escuela Superior de Física y Matemáticas.
[77] Escuela Superior de Física y Matemáticas.

## Marco Teórico

### Percepción mundial de las ciencias.

En la actualidad varios estudios revelan que los jóvenes no se encuentran atraídos a las ciencias. Uno de estos estudios es el ROSE (de las siglas del inglés *The Relevance Of Science Education*) sus resultados dibujan que los jóvenes de los países desarrollados piensan que las ciencias son importantes, pero, la gran mayoría, no quiere continuar estudiándolas más allá de la etapa obligatoria; mientras que en los países en vías de desarrollo aún hay un amplio sector que piensa seguir estudiándolas (Marba y Márquez, 2010). Este escaso interés por realizar estudios de ciencias y trabajar en el futuro como científico o ingeniero, así como un cierto desencanto con la ciencia y la tecnología e, incluso, cierta hostilidad hacia ambas, parecen ser mayores en muchas de las naciones más desarrolladas, como en países de Europa Occidental y Japón; que en otras menos desarrolladas (Acevedo, 2005).

En general como lo mencionan Marba y Márquez (2010) la percepción que tienen los hombres es ligeramente más favorable hacia las clases de ciencia que las mujeres, además de que las mujeres están menos interesadas en tener trabajos relacionados con la ciencia o la tecnología.

Sanmarti (2002) menciona que los estudiantes tienen su propia visión de la ciencia y de los científicos, que es fruto, tanto de la enseñanza recibida en la propia escuela, como del hecho de vivir en un contexto en el que priman concepciones de la ciencia muy estereotipadas; y la escuela, normalmente, tiende más a reproducir estas concepciones que a renovar y a construir otros puntos de vista

### Carreras elegidas por los hombres y mujeres

Según ANUIES (2001), la matrícula de mujeres en licenciatura ha aumentado, aunque con fuertes diferencias dependiendo del área de conocimiento; pues estos datos muestran que las mujeres predominan en las áreas de ciencias de la salud, de las ciencias sociales y las administrativas; y los varones en las agropecuarias, ingenierías y tecnologías (Razo, 2008). Estos datos muestran que a pesar de que las mujeres se encuentran en su mayoría estudiando en las áreas conocidas propias de lo femenino, en aquellas consideradas de lo masculino empiezan a tomar presencia, tal es el caso de las ciencias naturales y exactas, las agropecuarias, las ingenierías y tecnologías (Razo, 2008).

El estudio de Spear (1984) muestra que las diferencias por sexo son muy marcadas en la orientación de carreras de ciencias, a los hombres se les orienta a: Físicas, Ingeniería, Arquitectura, Ciencias Exactas y carreras técnicas; y a las mujeres a: Biología, Medicina, Veterinaria y Ciencias de la Salud. Sólo Química fue recomendada por igual. Según Nuño (2000), la razón de esto se debe a que existe una predisposición entre el profesorado de ciencias a identificar las aptitudes científicas como aptitudes masculinas, lo que puede reforzar la identificación sexualmente estereotipada del estudiante.

Estos datos se repiten constantemente en otras investigaciones, y también se repite la visión para la física y las ingenierías como disciplinas masculinas, mientras que aquellas carreras relacionadas con el cuidado de las personas o de la naturaleza tienen visiones más femeninas (Marba y Marques, 2010).

**Situación actual de la mujer en la ciencia**

Aunque todo muestra que las ciencias en general no tienen una muy buena respuesta, tanto en hombres como en mujeres, en esta investigación se explora ¿por qué no acceden las mujeres al campo de la física? Antiguamente la causa de este problema se atribuía a las supuestas carencias biológicas o innatas de las mujeres. Pero dicha hipótesis ha sido refutada por la evidencia, ya que existen, y han existido mujeres que han contribuido al avance de la ciencia a lo largo de la historia, tanto en la ciencia "oficial": mujeres científicas e incluso Premios Nobel, como en el desarrollo de la humanidad (Nuño, 2000)

Como lo menciona Álvarez (1992), aunque en la actualidad se ha superado, al menos en el terreno formal, aquella afirmación de que “la ciencia no es cosa de mujeres”, y una cantidad apreciable de investigaciones se ocupan de la escasa presencia de mujeres en la actividad científica y técnica, y de la enseñanza de las ciencias experimentales; desde una perspectiva no sexista, todavía continúa siendo un problema a vencer.

En los resultados obtenidos por el INEGI (Instituto Nacional de Estadística y Geografía) se revela que el 27 por ciento de hombres estudia alguna carrera STEM (acrónimo de los términos en ingles *Science, Technology, Engineering and Mathematics*), mientras que en el caso de las mujeres es el 8 por ciento (Alegría, 2018). Además, de acuerdo con la UNESCO, solo el 28% de quienes se dedican a la investigación en el mundo son mujeres. En México, el porcentaje llega solo al 33%, es decir solo 3 de cada 10 personas que se dedican a las ciencias, son mujeres.

Para contrarrestar lo anterior se requiere generar más ciencia, investigación e innovación, lo que redunda en mayores necesidades de recursos humanos y con ello la inserción de las mujeres en aquellas carreras donde antes no tenían presencia, tales como Ingeniería Química, Ingeniería Física, Ingeniería Ambiental, así como Computación y Sistemas, entre otras. (Razo, 2008)

**Datos de investigaciones similares.**

En una investigación realiza por Nuño (2000), donde se aplicó un cuestionario a profesorado de ciencias en formación inicial y permanente, se encontró que un número relevante de respuestas de los profesores a los que se aplicó esta, utilizaron lo masculino, a pesar de que en las preguntas se solicitaban cualidades de personas dedicadas a tareas científicas, lo que induce a pensar que existe implícitamente la asociación: profesional de la ciencia = científico (hombre).

Algo parecido ocurrió con la investigación hecha por Domínguez, la cual, buscaba conocer la imagen, creencias, pensamiento, estereotipos, sentimientos que tenían 58 estudiantes de pregrado de la universidad de Guadalajara, este, por medio de un cuestionario y una entrevista. Ella observó que las respuestas que daban estaban asociadas a la ciencia como una actividad eminentemente masculina, además de que es reservada a unos cuantos, particularmente a las minorías dotadas.

Pero a pesar de que al profesional de la ciencia lo asociaran más a lo masculino, sorprendentemente las diferencias se encontraron a la hora de percibir la visión que tenían entre hombres y mujeres, siendo más igualitaria en la visión de las alumnas.

Otro dato encontrado en estas investigaciones es la basada en las diferencias actitudinales, pues el 70% de las mujeres que hacían ciencias "duras" resaltan la importancia de que sean más las chicas que deberían introducirse en la física. Este grupo de mujeres parecía tener una actitud más liberal en cuanto al papel que les ha sido asignado según el sexo, lo cual concuerda con el hecho de que gocen de mayor autoestima y de esta manera se encuentren menos preocupadas por ajustarse a las normas sociales. Por último, en lo relativo a la elección de futuras profesiones, las respuestas se categorizaron en dos grandes grupos: motivos profesionales y motivos sociales. Las estudiantes de ciencias "duras" conceden más peso a los motivos profesionales que las otras, siendo sorprendente su tendencia a considerar las motivaciones profesionales más importantes que las sociales (Nuño, 2000).

Así mismo, en esta investigación se encontró que la concepción sobre la ciencia y las personas científicas que posee el alumnado es menos estereotipada y rígida que la que transmite los textos y los suplementos científicos de la prensa. Aunque sólo consideran ciencias a las denominadas "duras" y consecuentemente no se aprecia la necesidad de la interdisciplinaridad, además las tecnologías no se consideran ciencia (Nuño, 2000).

**Metodología**

Como la inserción tanto de hombres como de mujeres (en especial de las mujeres) a la física es pequeña comparada con otras carreras de las ciencias experimentales, las autoras de este documento llegaron a la conclusión de que debían averiguar algunas de las razones de este fenómeno.

Es por esa razón que se elaboró un cuestionario que incluía un total de 9 preguntas abiertas, el cual debía de ser aplicado a estudiantes (tanto hombres y mujeres) que se encontraran estudiando el tercer semestre del bachillerato, pues se encuentran tomando la materia de física I, de acuerdo con el nuevo plan de estudios de la SEP.

Este cuestionario fue aplicado en la Escuela Preparatoria Oficial no. 331 en Zumpango, Edo. De México, tomando un grupo del turno matutino y otro en el turno vespertino, con lo cual se obtuvieron un total de 80 cuestionarios. Además, en el grupo del turno matutino el docente de física era mujer, y el docente del turno vespertino era hombre.

Para evitar algún tipo de influencia en los estudiantes, el aplicador del cuestionario no mencionó que era un estudiante de Física y permitió la libertad de usar cualquier material (lápiz, colores, plumas, etc) para contestar el mismo. El tiempo que cada grupo ocupo fue diferente, pues en el turno vespertino se usaron 50 minutos para contestar, ya que esta fue la única actividad que hicieron durante este tiempo; mientras que en el turno matutino hicieron uso de 100 minutos pues se encontraban en una práctica de laboratorio.

Para el análisis de datos se hizo uso de artículos para así poder elaborar redes sistémicas coherentes usando las respuestas obtenidas de estos estudiantes.

Puesto que el objetivo de este artículo es conocer la percepción que tienen los jóvenes sobre las aptitudes que deben poseer las personas dedicadas a la Física, se presentará a continuación la pregunta del cuestionario que los jóvenes respondieron para saber dichas actitudes:

En tu clase de Física se propuso hacer una visita al Centro de Nacional de Metrología (CENAM), donde una persona experta en la materia te explicará cómo establecen y mantienen los patrones nacionales de medición y mostrará ejemplos de cómo hacer una calibración de instrumentos. ¿Crees que esta persona va a ser un HOMBRE o una MUJER? Explica tu respuesta.

## Resultados

Puesto que aparentemente la pregunta ¿Crees que esta persona va a ser un hombre o una mujer? Solamente admitía dos respuestas, se encontraron otras, una de las cuales fue ambos, y otras que no responden a la pregunta. A continuación, se mostrará la frecuencia con la que estos estudiantes dieron respuesta a que la persona experta fuera mujer, hombre o ambos:

Tabla I. Frecuencia de selección para la persona experta.

| Persona | Ambos | Mujeres | Hombres |
|---|---|---|---|
| Frecuencia | 39 | 22 | 15 |

Como se observa en la tabla I, 39 estudiantes decidieron que los expertos podrían ser personas de cualquiera de los dos sexos, 22 que esta persona seria una mujer y 15 que sería un hombre.

Como la pregunta solicitaba la razón de la selección de dicha respuesta, con las respuestas se elaboró una red sistémica, la cual se presenta en la figura 1.

La distribución de dicha red, donde se presentan las razones por las cuales decidieron que la persona sería hombre o mujer, debido a las “aptitudes del experto en Física” es la siguiente, la cual, está clasificada en 4 campos y de estos sus subcampos posteriores:

A) Hombre: en este campo se presentan todas las aptitudes que se le atribuyen a las personas con el sexo masculino, dividiendo estas en 3 subcampos y los argumentos que estos presentan

I) Competencias: son las capacidades que se les atribuye a las personas dedicadas a la física, según la clasificación marcada por Tuning
   1. Labor social: son las actividades que hacen las personas de ciencia al momento de compartir su conocimiento a otras personas ajenas a esta actividad.
      a) En visitas tan expertas, se imaginan a un hombre, pero no tienen duda que la mujer pueda.
      b) Sienten que normalmente es más común que en estas exposiciones las haga un hombre.
      c) A veces sienten que es más fácil entender a los hombres, para así interesarse por el tema.

II) Realidad Social: es la realidad que reflejan cuando piensan en las personas de la ciencia.
   2. Percepción social: es la percepción que reciben de la sociedad que los rodea
      d) Perciben que viven en una sociedad donde prefieren darles éste trabajo a los hombres, por los estándares machistas
      e) Consideran que hoy en día el machismo en la sociedad es muy alto y no les dan las mismas igualdades a las mujeres
      f) Según los estudiantes, esa carrera es para hombres y no para mujeres
   3. Entorno social: muestran conocimiento de personas cercanas a ellas, las cuales toman de ejemplo.
      g) Saben más acerca de físicos hombres que de mujeres
      h) Han visto que son carreras más estudiadas por hombres
      i) Conocen más físicos hombres que mujeres
   4. Percepción personal: es la idea que se han creado personalmente cada uno.
      j) Se imaginan que hay más probabilidad que sea hombre
      k) Sienten que la mayoría de físicos son hombres
      l) Normalmente piensan en un hombre, pues piensan que es más común que ellos den una conferencia o se presentan frente a mucha gente; sin embargo, con la modernidad que se vive hoy, no les sorprenderían si fuese mujer.

III) Otros: son las ideas que no pueden estar categorizadas como una competencia o que sean parte de su realidad social..
   5. En ocasiones las carreras de ingeniera como la física lo que más se encuentra es hombre.
   6. Se conocen más hombres físicos, pero me asombraría una explicación de una mujer
   7. A ellos les interesa más esos temas

B) Mujer: para este campo, tenemos las aptitudes que se les da a las personas con el género femenino, las cuales se dividen en cuatro categorías.

IV) Competencias:

8. Cognitiva: son las actividades que comprenden al desempeño intelectual en la física.
    m) Son mejor explicando
    n) Tienen más facilidad de entendimiento
    o) Sienten que tiene un poco más de control con los números
9. Labor social:
    p) Consideran que es fácil entenderles a lo que están explicando
    q) Opinan que saben expresarse mejor.
    r) Suenan mejor al expresarse
    s) Sienten que son mejor para expresarse y de hecho puede usarse mejor el conocimiento adquirido.
    t) Tienden a explicarse más fácilmente y que se les entienda mejor.
    u) Son capaces de responder con actitud y conocimiento a lo que se está demandando
10. Metodológica: Son las actitudes para realizar actividades que demandan una cierta metodología
    v) Tienden a ser más ordenadas
    w) Son más ordenadas desde el punto de vista de los estudiantes
    x) Son más rápidas para contestar

V) Capacidad: son las actividades que cualquier persona tiene, pero desarrollada en distintos grados:
11. Consideran que la capacidad cerebral de la mujer es elevada
12. Son más inteligentes
13. Suponen que podría hacer un buen trabajo

VI) Realidad Social:
14. Percepción personal
    y) Tienen recuerdos donde una mujer representando el papel de alguien muy inteligente

VII) Otros:
15. Hay más mujeres que se interesan en la materia
16. Hay mujeres que les apasiona eso
17. Porque las mujeres ya se están desempeñando como las mejores

C) Ambos: en este campo se presentan las aptitudes que tanto los hombres como las mujeres tienen (es decir, ambos sexos lo tienen) para la enseñanza y aplicación de la física, dividida en cuatro subcampos.

VIII) Competencias
18. Cognitiva
    z) Ambas personas pueden obtener los mismos conocimientos
    aa) Son potencialmente iguales en cuestión de poder explicar
    bb) Consideran que todos son capaces de hacerse expertos, lo que es importante es la forma en la que trasmiten este conocimiento.
    cc) Lo que importa son los conocimientos que estos poseen.

dd) No importa el género, mientras pueda explicar el tema
ee) La inteligencia no depende del sexo.

19. Metodología:
    ff) No importa su sexo, pues este ya habrá hecho una gran aportación a la física y la humanidad
    gg) No importa quién sea mientras haga la demostración que se haga dicho por esta persona o sus compañeros.
20. Labor social
    hh) Tienen la misma capacidad de explicar los temas requeridos
    ii) Cualquiera puede explicarte sobre la materia de física, si así lo deseen.
    jj) Ambos géneros darían el mismo resultado (no importa quien sea)
    kk) Ambos son humanos con la misma capacidad de enseñar
    ll) Los dos tienen la preparación para poder explicar a los demás

IX) Capacidad:

21. Se destacarían de la misma forma
22. Tienen la misma capacidad de aprender, enseñar y explicar.
23. Cualquiera que pueda ponerse de meta estudiar, puede estudiar
24. Cualquiera de los dos, dependiendo de su destreza en la materia.
25. Ambos pueden estar igualmente interesados.
26. Por el momento ambos pueden trabajar en lo que sea que quieran
27. Puede ser lo que quiera ser, mientras que esto no afecte a terceros.

X) Realidad social

28. Percepción personal
    mm) En la percepción de algunos de los estudiantes, consideran que cualquiera de los dos puede estar en la física, puesto que la física no discrimina.
    nn) Para estudiar física y saber de ella no hay diferencia de género, un claro ejemplo es que hay muchas físicas mujeres
    oo) No hay necesidad de tener algún género en específico.
    pp) Consideran que es una rama en donde los dos géneros son aceptados
    qq) No le ven ningún problema al sexo de la persona que para ellos la física es para todos, no veo problema

XI) Otros

29. No es algo que esté definido
30. No implica algo concreto
31. Pueden ser ambos mientras que esto no dependa de lo que vaya a explicar
32. Puede ser cualquier, no necesariamente un hombre o una mujer.

33. Puede ser un hombre o una mujer, depende de los días que estos estén laborando y los días de descanso de los expertos.
34. No importa el sexo de la persona experta para acabar esta carrera u otras
35. No importa el sexo de la persona

D) Sin especificación: estas son respuestas que no dieron ningún aporte a la pregunta.
   XII) Quién sabe, no cualquiera de entra a eso
   XIII) No sé, porque no se necesita un género en especifico
   XIV) No sé.

Para el campo hombres, la categoría realidad social, es la que muestra la mayoría de las aptitudes que les asocian a los hombres expertos en Física, con respecto a las otras 2 categorías. En el caso del campo mujeres, se muestra que la categoría con mayor número de aptitudes es el de las competencias. Además, a diferencias del campo anterior, aquí se integra una nueva categoría, la cual es la capacidad.

Finalmente el campo ambos, la categoría de competencias, es la categoría que más aptitudes tiene con respecto a las otras categorías del mismo, sin embargo el resto de las categorías también tiene un buen número de aptitudes.

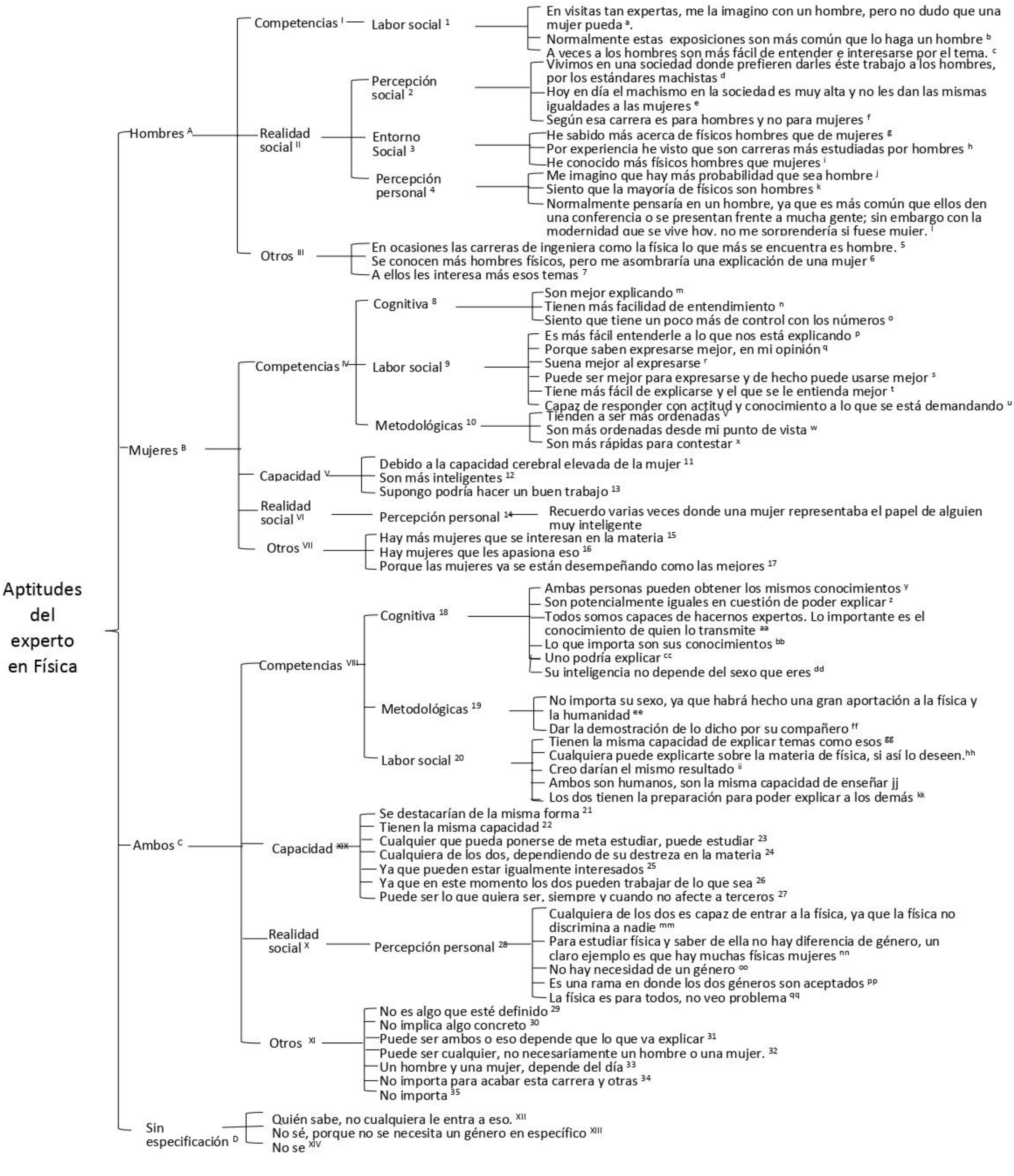



Figura 1: Red sistémica sobre las percepciones de las aptitudes del experto en física

## Conclusiones

Como se observa de los resultados, la mayoría de las aptitudes que les dieron a las personas de la ciencia, son las correspondientes a las competencias, seguida por las de la realidad social. Claro que, en cada campo la tendencia no se presentó de la misma manera, ya que, en el campo de hombres, el mayor número de aptitudes se encuentra en la realidad social.

Por otra parte, podemos apreciar que, aunque para los hombres las competencias no son la mayoría, pues estas se reflejan únicamente a la labor social y en el caso de la realidad social, estas las tenemos clasificadas en percepción social, entorno social y percepción personal, muestran que las actitudes correspondientes a los hombres se desarrollan únicamente como factores que se encuentran estereotipados en las normas sociales establecidas.

Para el caso de las mujeres, las competencias que más se remarcaron fueron las de la labor social, donde, la mayoría de las respuestas estaban enfocadas al hecho de que ellas eran mejor expresándose, y con ello, se puede entender mejor el tema. Pero también las otras aptitudes argumentan, que son las mujeres que por su mayor capacidad intelectual, organización y por explicar mejor, las candidatas perfectas para ser la persona experta.

Finalmente, para el caso de ambos, las competencias cognitivas y de labor social, fueron las más argumentadas por estos estudiantes encuestados. Es decir, ellos recalcan que, para ser experto en dicho tema, estas personas deben ser inteligentes, explicar bien, ser capaces y poder enseñar bien.

Además, estos argumentos muestran que para los campos de ambos y mujeres, las actitudes que tienen son semejantes entre ellas en casi todos los aspectos. También notamos que en las competencias de labor social, los tres campos principales tienen un parecido entre ellos con respecto a los argumentos dados.

## Reflexiones finales

Como se dijo en las conclusiones, las actitudes que más poseen son las competencias, pero expresadas de forma diferente entre los hombres, mujeres y ambos. Además de los resultados (expresados en la tabla 1), vemos que la mayoría de los estudiantes ven a la persona experta en cualquiera de los dos sexos (ambos), es decir, ven que las personas dedicadas a la física son tanto hombre como mujer, llegando a concluir que estos jóvenes ven igualdad para ser un Físico.

Para el caso de las personas que solo señalaron un sexo, sorprendentemente la mayoría comunico que la persona experta era una mujer. Las razones que argumentan para dichos casos son el hecho de que explican mejor, son organizadas, más inteligentes y capaces de hacer lo que se les proponga. Este resultado contradice a las investigaciones tanto de Nuño, como la de Domínguez, donde ellos argumentaban que veían a la ciencia como algo masculino (o con características masculinas).

Además, debemos añadir que las razones que dieron para los hombres no sustentaban características que los hicieran especiales para poder ser un físico, pues lo que estos estudiantes argumentaban, era porque en la sociedad lo que siempre ha predominado en las carreras científicas son hombres y este patrón ya estaba establecido de cierta manera en las creencias de las ciencias.

Con esto, se nota que la mayoría de los jóvenes (solamente de esta comunidad), ven la equidad para la física, pero también dan a notar que todavía existe cierto dominio de machismo en esta rama.

Estos resultados nos muestran cosas favorables, pero también, deja en incertidumbre a estas autoras al pensar, que, si estos estudiantes están cambiando su pensamiento para lograr una integración de la mujer en la ciencia, ¿porque esto todavía no se ve reflejado en el número de mujeres egresadas de la Física? Quizá esta pregunta tenga respuesta con el resto de preguntas que se aplicaron a estos estudiantes, pero que lamentablemente no se presentan en este documento.

## Referencias

Razo, Martha Laura. La inserción de las mujeres en las carrera de ingeniería y tecnología (2008), Perfiles educativos, vol. XXX, núm. 121, pp. 63-96

Leyton, Daniel; Sánchez, Carmen Luz; Ugalde, Pamela. Estudio Percepción de los Jóvenes sobre la ciencia y Profesiones científicas. 2010

Marba-Tallada, Anna y Márquez Bargallo, Conxita. ¿Qué opinan los estudiantes de las clases de ciencias? Un estudio transversal de sexto de primaria a cuarto de ESO. 2010. Enseñanza de las ciencias. Pág. 19-30

Nuño Angós Teresa. Género y ciencia. La educación científica. Revista de Psicodidactica, no. 9-2000. Pags 183-214

Álvarez Linares, Mari. Pero… ¿puede haber sexismo en las ciencias experimentales? Rvta. Interuniversitaria de Formación del Profesorado, no. 14, Mayo/agosto 1992. Pp. 27-36

Sanmartí, Neus. La didáctica de las ciencias en la educación secundaria obligatoria. 2002. Capítulo 2. Síntesis educación.

Acevedo Díaz, José Antonio Proyecto ROSE: relevancia de la educación científica Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias, vol. 2, núm. 3, 2005, pp. 440-4447 Asociación de Profesores Amigos de la Ciencia: EUREKA Cádiz, España

Domínguez Gutiérrez, Silvia. La ciencia en estudiantes mexicanos.

Alegría, Alejandro. Un 50% de alumnos de nivel superior, en carreras no relacionadas con las ciencias. 20/10/2018

# Sentido común y razonamiento en el aprendizaje

José M. Rivera Rebolledo[78],
jrivera@esfm.ipn.mx

## Resumen

En este trabajo se comentan varios ejemplos de la manera de razonar en situaciones que se presentan durante la impartición de cursos en el proceso de aprendizaje de estudiantes de licenciatura de la carrera de Física y Matemáticas del IPN. En particular, los casos tomados fueron de las clases del curso de Física II. Se sugieren algunas ideas para mejorar dicho proceso.

## Desarrollo y Metodología

En lo que sigue, se dan diferentes ejemplos de problemas físicos del curso de Física II en los que se plantean diferentes preguntas relacionadas con las respectivas respuestas de los estudiantes y las que son más adecuadas al caso.

En el problema 16.10 (Van der Merwe, 1961): en que se pide “Determinar el *empuje* hacia abajo *debido a la tensión superficial* sobre una varilla sólida de vidrio cuando está sumergido su extremo inferior verticalmente en agua”, el estudiante calcula:

$W_\sigma = \sigma A$ (1)

válido para una burbuja, e incluyen:

$W_g + W_E$ (2)

que no se piden, en lugar de

$W_\sigma \approx F_\sigma l$ y $F_\sigma = \sigma\, l = \sigma 2\pi r,$ (3)

Por lo tanto, aunque se podría proceder según (2), ésta manera no deja de ser de más rodeo y en consecuencia más complicada, pudiendo optarse por la más directa y simple de (3). Este procedimiento se puede interpretar como un razonamiento más cercano al sentido común, que al científico.

2. En el problema 7.4 (Sears, 1973), el enunciado dice: sea un tanque con *A*, *h* y *a*, dados, de donde se obtienen $\varphi$ y de aquí $V$; y con los datos el estudiante obtiene:

$$\therefore t = 0.127 s \text{ ¡}, (4)$$

[78] Departamento de Física, ESFM-IPN, Cd. de México.

lo cual es casi imposible físicamente para casi cualquier recipiente real; esto muestra que hace falta análisis crítico de los resultados numéricos obtenidos, como lo exige el razonamiento científico.

3. En el ejemplo de esfera una que cae en un fluido de viscosidad $\eta$, *ib.*, se tiene:

$v \approx 1 - exp(\text{-}\gamma\ t),\ \beta = g - \frac{E}{m}, (5)$

se pregunta por el significado físico de $\beta$, con respuestas dadas: 1) fuerza sobre *m*, 2) aceleración; 3) aceleración *virtual* o parcial sin viscosidad $\eta$, siendo lo correcto, de (5):

$\beta = g - a_E,$ con $a_E = \frac{E}{m}\ , (6)$

Así, $\beta =$ diferencia de aceleraciones gravitatoria y de empuje. Aquí, la manera de razonar debería emanar de la ec. (5), donde la gravedad $g$ nos da la pauta directa, seguido del otro término relacionado con el empuje *E,* por lo cual nos debe dar la aceleración de éste.

Asimismo, se pregunta significado de $t$ en

$exp(-\gamma\ t) = 0,\ \ \text{o}\, exp(+\gamma t) = \infty,$ (7-8)

con respuestas de estudiantes $t = 0,$ y, *solamente después de usar calculadora*, $t = \infty,$ que es lo cierto. Aquí lo que se puede argumentar es la probable falta de práctica de la función exponencial y de su gráfica, con la cual se ve de inmediato el comportamiento de (8).

4. En derivación de ecuación de Bernoulli, *ib*, en tubo de flujo horizontal y después asciende de manera curva hasta quedar nuevamente horizontal, pero de mayor área que la inicial, se pregunta equivalencia con el *ejemplo* de física I, habiendo previamente comentado el caso de bloque que sube sobre un plano inclinado, tal que sólo se pedía *extender* la idea, contestándose:

1. "Por la ecuación de energía…" (respuesta meramente matemática).
2. "De las fórmulas …" (mismo comentario).
3. "Cilindro más tubo de *flujo* dentro", (respuesta cercana por lo de cilindro, pero lo de flujo es de Física II).

   Aquí, lo más sensato o cercano a la situación es el de un bloque en forma de viga *continua* que es empujado sobre un plano inclinado, así como el tubo de flujo tiene una fuerza en la parte inferior que lo impulsa, y otra que se le opone, como la de rozamiento.

   5. En problema 6.83, (Bújovtsev, 1979): "Una cuerda fina fue sustituida por otra del *mismo* material, pero tiene el diámetro dos veces mayor. Encuentre cuánto deberá aumentar la tensión de la cuerda para que la frecuencia de sus oscilaciones no cambie"; aquí:

$\mu' = \mu, \rho' = \rho,$ (9)

con

$1. (l_0, r, m, \mu),\ 2. (l_0, 2r, m', \mu'),\ (10 - 11)$

$$\mu = \frac{m}{l_0},\ \ \mu' = \frac{m'}{l_0} (12 - 13)$$

$$m' \neq m \rightarrow \mu' \neq \mu, \qquad (14)$$

el estudiante toma de manera correcta $\mu' \neq \mu$, si la longitud $l_0$ se mantiene constante pero la masa $m'$ es diferente, ver (12-13).

Aquí, en

$v^2 \approx \frac{F}{\mu} \approx \frac{F}{m}$, o:$v^2 \approx \frac{F}{m}$, y $v'^2 \approx \frac{F'}{m'}$,(15-16)

que con velocidad de la onda constante, o $v' = v$, nos da:

$$\frac{F'}{m'} = \frac{F}{m}\ , (17)$$

donde

$$m = \rho\, V \approx \rho r^2 l_0,\ \ (18)$$

y

$m' \approx \rho r'^2 l_0 = 4\rho r^2 l_0 = 4m$, o $m' = 4m$, (19)

Así, en (17):

$$v'^2 \approx \frac{F'}{4m} = \frac{F}{m}, \qquad (20)$$

$\therefore F' = 4F$, ok. (21)

Lo que se debe de hacer notar aquí es que, efectivamente, $\mu' \neq \mu$, ya que la masa $m'$ está concentrada en un radio menor *r* pero con la *misma* longitud $l_0$, y la que se mantiene constante es la densidad volumétrica $\rho' = \rho$.

**Conclusiones**

De acuerdo con lo arriba expuesto, en lo cual hemos abordado diferentes problemas o problemas típicos donde el estudiante muestra su manera de pensar, en particular físicamente, hemos encontrado que en ocasiones bastaría con seguir un poco el *sentido común* para entender lo que está sucediendo en la situación planteada, véanse ecs. (4-5), en donde en ec. (5) se puede incluir también la parte *literal;* el siguiente paso sería el de la *lógica*, la cual sería suficiente para en los casos de ec. (3) y ejemplo 4. Finalmente, en ej. 5, es interesante el ligamen que se debe hacer cuando se hace la transición de densidades *lineal* a *volumétrica* de masa.

## Referencias


1. Van der Merwe, C. W. (1961). *Theory and Problems of College Physics*. New York: Schaum Publishing Co., sixt ed.
2. Sears, F. W. (1973). *Mecánica, movimiento ondulatorio y calor.* Madrid: Aguilar, 1ª ed.
3. Bújovtsev B. B. *et al.* (1979). *Problemas Seleccionados de la Física Elemental*. Moscú: Edit. Mir.