

Capítulo VII

Cálculo tensorial

26

Álgebra de tensores

Sea \mathbf{r} el vector de posición de un punto en las coordenadas cartesianas x, y, z

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z, \quad (26.1)$$

donde $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ es una base de tres vectores constantes, unitarios y ortogonales.

En muchos casos es útil tener otras coordenadas por lo cual expresamos \mathbf{r} , esto es x, y, z , en función de tres nuevas coordenadas y^1, y^2, y^3 que en forma abreviada se representan por y^j , con $j = 1, 2, 3$. La transformación inversa de coordenadas se tiene cuando se conocen las coordenadas y^k ($k = 1, 2, 3$) en función de las coordenadas cartesianas x, y, z .

Por ejemplo, para las coordenadas cilíndricas

$$x = y^1 \cos y^2, \quad y = y^1 \sin y^2, \quad z = y^3.$$

Considero los tres vectores obtenidos por la derivada parcial respecto a las coordenadas y^j del vector de posición \mathbf{r} .

$$\mathbf{e}_j = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^j} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (26.2)$$

En lo sucesivo una letra como índice se supondrá toma los valores 1, 2, 3, aunque no se indique.

Los vectores definidos en (26.2) forman una base del espacio de tres dimensiones. En esta base un vector \mathbf{A} del espacio tendrá las componentes A^j

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^3 A^j \mathbf{e}_j. \quad (26.3)$$

Desde ahora se adopta la convención de suma de Einstein: se suprime el signo de suma y la suma se efectúa siempre que se repitan los índices. Por ejemplo la ecuación (26.3) se escribirá en la forma

$$\mathbf{A} = A^j \mathbf{e}_j. \quad (26.4)$$

Considero ahora la base (26.2) y las componentes A^j de un vector en otro sistema coordenado, que para distinguirlo lleva una raya sobre las letras correspondientes. Sean \bar{y}^j las nuevas coordenadas. Los vectores de la base (26.2) se escriben entonces

$$\bar{\mathbf{e}}_k = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{y}^k}. \quad (26.5)$$

Las bases (26.5) y (26.2) están relacionadas por la regla de la cadena

$$\bar{\mathbf{e}}_k = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial \bar{y}^k} = \mathbf{e}_j \frac{\partial y^j}{\partial \bar{y}^k}. \quad (26.6)$$

Si expresamos al vector \mathbf{A} en la nueva base (26.5), \bar{A}^k serán sus componentes, y al sustituir la ecuación (26.6) se encuentra

$$\mathbf{A} = \bar{A}^k \bar{\mathbf{e}}_k = \bar{A}^k \mathbf{e}_j \frac{\partial y^j}{\partial \bar{y}^k} \quad (26.7)$$

y por la igualdad que debe existir entre las expresiones (26.4) y (26.7) se encuentra

$$A^j = \bar{A}^k \frac{\partial y^j}{\partial \bar{y}^k}. \quad (26.8)$$

La cual es la regla de transformación de las componentes A^j ante un cambio de coordenadas. Las componentes A^j se llaman

contravariantes. Su nombre proviene de la forma como se transforman ante un cambio de coordenadas.

Se define al tensor métrico en las coordenadas y^j por medio del producto escalar

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j, \quad (26.9)$$

el cual es simétrico en sus dos índices

$$g_{ij} = g_{ji}. \quad (26.10)$$

Ante un cambio de coordenadas, este tensor se transforma según resulta de la ecuación (26.6) en la forma

$$g_{kl} = \bar{g}_{ij} \frac{\partial \bar{y}^i}{\partial y^k} \frac{\partial \bar{y}^j}{\partial y^l}. \quad (26.11)$$

Se observa la forma diferente de transformación, por medio de la matriz jacobiana inversa de la que aparece en (26.8). El tensor métrico es dos veces covariante por tener dos índices y transformarse cada uno de ellos de acuerdo a la ecuación (26.11).

El nombre de tensor métrico proviene de la propiedad de la diferencial ds de distancia recorrida a lo largo de una curva

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = dy^i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^j} dy^j = \\ &= \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j dy^i dy^j = g_{ij} dy^i dy^j. \end{aligned} \quad (26.12)$$

Considero ahora a otra base diferente de vectores, determinada por el gradiente de las coordenadas

$$\mathbf{e}^j = \nabla y^j. \quad (26.13)$$

Ante un cambio de coordenadas estos vectores se transforman por medio de la regla de la cadena

$$\bar{\mathbf{e}}^j = \frac{\partial \bar{y}^j}{\partial y^k} \nabla y^k = \frac{\partial \bar{y}^j}{\partial y^k} \mathbf{e}^k. \quad (26.14)$$

Si expresamos a un vector \mathbf{A} en esta base, sus componentes serán A_k y \bar{A}_j en dos sistemas coordenados diferentes

$$\mathbf{A} = A_k \mathbf{e}^k = \bar{A}_j \bar{\mathbf{e}}^j. \quad (26.15)$$

Sustituyo (26.14) en (26.15) y se encuentra

$$\mathbf{A} = \bar{A}_j \frac{\partial \bar{y}^j}{\partial y^k} \mathbf{e}^k = A_k \mathbf{e}^k, \quad (26.16)$$

por la cual se deduce la ley de transformación de estas componentes

$$A_k = \bar{A}_j \frac{\partial \bar{y}^j}{\partial y^k}, \quad (26.17)$$

que es la forma covariante de transformación encontrada previamente en el tensor métrico (26.11). Las componentes A_j de un vector se llaman covariantes. Las dos bases $\bar{\mathbf{e}}^j$ y \mathbf{e}_k están relacionadas por la propiedad

$$\bar{\mathbf{e}}^j \cdot \mathbf{e}^k = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^j} \cdot \nabla y^k = \frac{\partial y^k}{\partial y^j} = \delta_j^k, \quad (26.18)$$

donde δ_j^k es la delta de Kronecker igual a uno cuando son iguales j y k , y cero cuando son diferentes. Para obtener la ecuación (26.18) se hizo uso de la regla de la cadena.

Las bases con la propiedad (26.18) se dicen duales y en tres dimensiones se pueden expresar con ayuda de los productos escalar y vectorial como sigue

$$\bar{\mathbf{e}}^i = \frac{\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k}{\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k)} \quad (26.19)$$

$(i, j, k$ permutación par de 1, 2, 3)

$$\mathbf{e}_i = \frac{\bar{\mathbf{e}}^j \times \bar{\mathbf{e}}^k}{\bar{\mathbf{e}}^i \cdot (\bar{\mathbf{e}}^j \times \bar{\mathbf{e}}^k)} \quad (26.20)$$

$(i, j, k$ permutación par de 1, 2, 3).

Estas expresiones permiten obtener la base dual por medio de estas operaciones algebraicas.

De forma similar a (26.9) se define al tensor simétrico

$$g^{kl} = \mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}^l, \quad (26.21)$$

la cual se transforma dos veces contravariantemente, según se demuestra por (26.14) en (26.21)

$$g^{kl} = \bar{g}^{ij} \frac{\partial y^k}{\partial \bar{y}^i} \frac{\partial y^l}{\partial \bar{y}^j}. \quad (26.22)$$

Sean f^{kl} las componentes de \mathbf{e}^k en la base \mathbf{e}_l

$$\mathbf{e}^k = f^{kl} \mathbf{e}_l.$$

Tomo el producto escalar de esta ecuación con \mathbf{e}^j y deduzco por (26.18)

$$g^{kj} = \mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}^j = f^{kl} \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}^j = f^{kj} \quad (26.23)$$

y se tiene entonces

$$\mathbf{e}^k = g^{kl} \mathbf{e}_l. \quad (26.24)$$

Se toma ahora el producto escalar de (26.24) con \mathbf{e}_j y se obtiene

$$\delta_j^k = \mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}_j = g^{kl} \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_j = g^{kl} g_{lj}, \quad (26.25)$$

donde se usaron (26.18) y (26.19). Este resultado muestra que las matrices de componentes g_{jk} y g^{kl} son las componentes de matrices inversas una de la otra. Viene también como corolario la propiedad análoga de (26.24)

$$\mathbf{e}_m = g_{mk} \mathbf{e}^k. \quad (26.26)$$

Si tomo el producto escalar del vector \mathbf{A} en sus formas (26.4) o (26.15), con los vectores \mathbf{e}_k y \mathbf{e}^k se deducen

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_k = A_k = g_{kl} A^l, \quad (26.27)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}^k = A^k = g^{kl} A_l. \quad (26.28)$$

Estas ecuaciones permiten obtener las componentes en una base por medio del producto escalar con la base dual. También nos dicen cómo subir y bajar índices por medio del tensor métrico y de su inverso.

Sea g el determinante del tensor métrico g_{ij} .

$$g = \det |g_{ij}|. \quad (26.29)$$

De acuerdo a (26.22) este determinante se transforma con ayuda del jacobiano

$$J(y^k/\bar{y}^i) = \det \left| \frac{\partial y^k}{\partial \bar{y}^i} \right| \quad (26.30)$$

en la forma

$$g = \bar{g} J^2(y^k/\bar{y}^i), \quad (26.31)$$

donde usamos que el determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes de cada factor.

La ecuación (26.9) se puede ver como el producto de una matriz por la matriz traspuesta

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3) \quad (26.32)$$

y al tomar el determinante de ambos miembros se deduce

$$g = [\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)]^2, \quad (26.33)$$

porque $\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)$ es el determinante de cada matriz del miembro derecho de (26.32).

A partir de este resultado las ecuaciones (26.19) se pueden escribir como

$$\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k = \sqrt{g} \mathbf{e}^i. \quad (26.34)$$

O también

$$\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k = \epsilon_{jkl} \mathbf{e}^l, \quad (26.35)$$

donde ϵ_{jkl} es antisimétrico en sus tres índices

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ikj} \quad (26.36)$$

y tal que

$$\epsilon_{123} = \sqrt{g}. \quad (26.37)$$

Como el determinante de una matriz se puede escribir con ayuda del símbolo antisimétrico, se deduce de (26.31) que ϵ_{ijk} es un tensor tres veces covariante.

En forma análoga se tiene

$$\mathbf{e}^k \times \mathbf{e}^l = \epsilon^{klm} \mathbf{e}_m, \quad (26.38)$$

con ϵ^{klm} antisimétrico en todos sus índices y tal que

$$\epsilon^{123} = 1/\sqrt{g}. \quad (26.39)$$

ϵ^{klm} es un tensor tres veces contravariante.

El producto de dos componentes de los tensores antisimétricos satisfacen la fórmula

$$\epsilon^{pqr} \epsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_i^p & \delta_j^p & \delta_k^p \\ \delta_i^q & \delta_j^q & \delta_k^q \\ \delta_i^r & \delta_j^r & \delta_k^r \end{vmatrix}, \quad (26.40)$$

en términos de un determinante de deltas de Kronecker. Se tiene también

$$\epsilon^{pqk} \epsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_i^p & \delta_j^p \\ \delta_i^q & \delta_j^q \end{vmatrix}, \quad (26.41)$$

que puede ser de utilidad en la expresión para el producto vectorial de dos vectores.

Las componentes del producto vectorial de dos vectores se expresan con ayuda de estos tensores antisimétricos en la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= A_j \mathbf{e}^j \times B_k \mathbf{e}^k = A_j B_k \epsilon^{jkl} \mathbf{e}_l = \\ &= A^l \mathbf{e}_l \times B^m \mathbf{e}_m = A^l B^m \epsilon_{lmn} \mathbf{e}^n. \end{aligned} \quad (26.42)$$

27

Análisis tensorial

Considero las derivadas de la base respecto a las coordenadas

$$\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial y^k} = \Gamma_{j\ k}^l \mathbf{e}_l = \Gamma_{jmk} \mathbf{e}^m \quad (27.43)$$

y las componentes $\Gamma_{j\ k}^l$, Γ_{jmk} , se llaman símbolos de Christoffel.

Como \mathbf{e}_j es una derivada respecto a la coordenada y^j , se encuentra la simetría

$$\Gamma_{j\ k}^l = \Gamma_{k\ j}^l . \quad (27.44)$$

Contrayendo (27.1) con \mathbf{e}^m

$$\mathbf{e}^m \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial y^k} = \Gamma_{j\ k}^m ,$$

e integrando por partes

$$\mathbf{e}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{e}^m}{\partial y^k} = -\Gamma_{j\ k}^m ,$$

por la cual

$$\frac{\partial \mathbf{e}^m}{\partial y^k} = -\Gamma_{k\ l}^m \mathbf{e}^l . \quad (27.45)$$

De la expresión (26.9), al tomar su derivada se encuentra

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = \Gamma_{jik} + \Gamma_{ijk} , \quad (27.46)$$

la cual se puede invertir

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial y^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial y^j} \right). \quad (27.47)$$

Derivo la ecuación (26.33) y se encuentra

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial y^k} &= \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 \cdot \Gamma_k^l \mathbf{e}_l + \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 \cdot \Gamma_k^l \mathbf{e}_l + \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \cdot \Gamma_k^l \mathbf{e}_l = \\ &= \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) [\Gamma_k^1 + \Gamma_k^2 + \Gamma_k^3] = \sqrt{g} \Gamma_k^j. \end{aligned} \quad (27.48)$$

Esta ecuación es útil al calcular la divergencia de un vector, como se ve más adelante.

El operador gradiente se expresa fácilmente en la base \mathbf{e}^k

$$\nabla = \mathbf{e}^k \frac{\partial}{\partial y^k}. \quad (27.49)$$

La divergencia de un vector se escribe entonces como

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \mathbf{e}^k \frac{\partial}{\partial y^k} \cdot (A^l \mathbf{e}_l) = \\ &= \mathbf{e}^k \cdot \left(\frac{\partial A^l}{\partial y^k} \mathbf{e}_l + A^l \Gamma_l^m \mathbf{e}_m \right) = \frac{\partial A^l}{\partial y^l} + A^l \Gamma_l^m, \end{aligned} \quad (27.50)$$

y sustituyendo (26.6) en (27.8) se encuentra también

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y^l} (\sqrt{g} A^l). \quad (27.51)$$

Calculo ahora el rotacional de un vector en tres dimensiones

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \mathbf{e}^k \frac{\partial}{\partial y^k} \times (\mathbf{e}^l A_l) = \mathbf{e}^k \times \left(\mathbf{e}^l \frac{\partial A_l}{\partial y^k} + A_l \Gamma_k^l \mathbf{e}^m \right) = \\ &= \mathbf{e}^k \times \mathbf{e}^l \frac{\partial A_l}{\partial y^k} + A_l \Gamma_k^l \mathbf{e}^k \times \mathbf{e}^m = \mathbf{e}^k \times \mathbf{e}^l \frac{\partial A_l}{\partial y^k} = \mathbf{e}_m \epsilon^{klm} \frac{\partial A_l}{\partial y^k}, \end{aligned} \quad (27.52)$$

donde noté la simetría de Γ_j^l y la antisimetría de $\mathbf{e}^k \times \mathbf{e}^m$ para cancelar un término en la última línea. Por ejemplo

$$(\nabla \times \mathbf{A})^3 = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial A_1}{\partial y^2} - \frac{\partial A_2}{\partial y^1} \right). \quad (27.53)$$

El laplaciano se escribe

$$\nabla \cdot \nabla \Psi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y^l} \left(\sqrt{g} g^{lm} \frac{\partial \Psi}{\partial y^m} \right), \quad (27.54)$$

donde usé (27.9) y las componentes contravariantes del gradiente.

Bibliografía

- [1] A. Lichnerowicz *Éléments de Calcul tensoriel* Armand Colin, Paris, 1962
- [2] A. J. McConnell *Applications of Tensor Analysis* Dover, New York, 1957
- [3] Rutherford Aris *Vectors, Tensors and the Basic equations of Fluid Mechanics* Prentice Hall Inc. New Jersey 1962.
- [4] J. L. Synge A, Schild *Tensor Calculus* Dover, 1978.
- [5] B. Spain *Tensor Calculus* Oliver & Boyd, Edinburgh, 1956